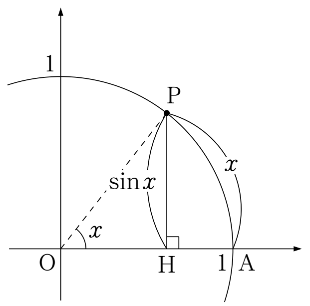
数学3　関数の極限の tutorial　No.6

名前

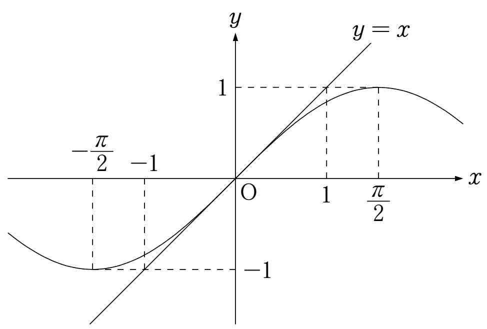
$\boxed{26}$ ［$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ **の極限**］ 弧度法で表された三角関数について，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ を考える。これは $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，この式のままでは極限は分からない。不定形を解消しようにも，分子が三角関数なので，約分もできない。この極限の求め方を考えよう。

(1) 次の図を利用して，極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ の結果を予想しなさい。

① 単位円

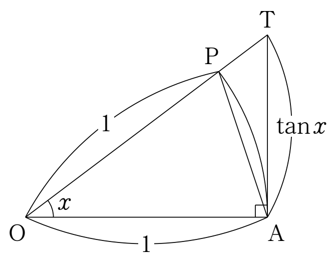


② $y=\sin x$ のグラフ



(2) 予想が正しいことを次のように証明した。$\boxed{}$ にあてはまる式を答えなさい。

右の図で，面積を比べると，△OAP < 扇形 OAP < △OAT



△OAP ＝ $\boxed{ア\qquad\qquad}$

扇形 OAP ＝ $\boxed{イ\qquad\qquad}$

△OAT ＝ $\boxed{ウ\qquad\qquad}$

よって，$\sin x < x < \tan x$

各辺を $\sin x\ (>0)$ で割ると，$1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

各辺の逆数をとると，$\boxed{エ\qquad\qquad}$

$\displaystyle\lim_{x\to +0}\cos x = 1$ なので，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = \boxed{オ\quad}$ … 終

（この後，$\displaystyle\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = 1$ も示さなければならないが省略する）

$\boxed{27}$ ［$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ **の極限のまとめ**］ $\boxed{26}$ の結果をまとめなさい。

(1) $\boxed{ア\qquad\qquad}$ （今後利用するので覚えておくこと）

(2) x が 0 に十分近いとき， $\boxed{イ\qquad}$

$\boxed{28}$ ［$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ **の極限の利用**］ 次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x^2}$

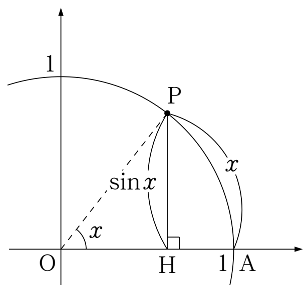
数学3 関数の極限の tutorial No.6

解答

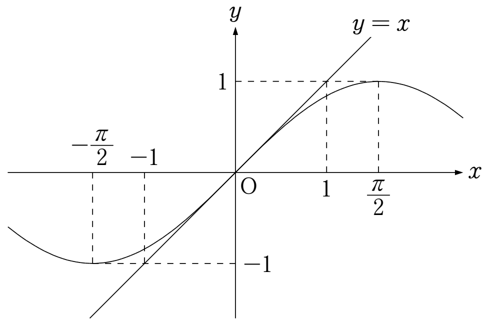
26 ［$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ の極限］ 弧度法で表された三角関数について，極限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ を考える。これは $\dfrac{0}{0}$ の不定形なので，この式のままでは極限は分からない。不定形を解消しようにも，分子が三角関数なので，約分もできない。この極限の求め方を考えよう。

(1) 次の図を利用して，極限 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ の結果を予想しなさい。

① 単位円



② $y=\sin x$ のグラフ



解答 円周上の点 P が点 A に近づくと，$\overset{\frown}{\mathrm{PA}}$ と線分 PH の長さがほとんど同じになるように見えるので，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{PH}}{\overset{\frown}{\mathrm{PA}}}=1$$

と予想できる。

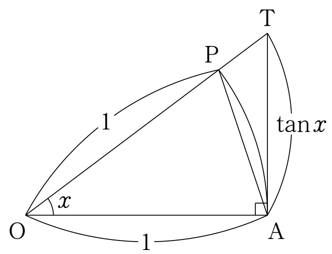
解答 原点に十分近いところでは，$y=\sin x$ のグラフは直線 $y=x$ ほとんど重なっているように見えるので，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$$

と予想できる。

(2) 予想が正しいことを次のように証明した。$\boxed{}$ にあてはまる式を答えなさい。

右の図で，面積を比べると，△OAP ＜ 扇形 OAP ＜ △OAT



△OAP ＝ ア $\boxed{\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin x=\dfrac{\sin x}{2}}$

扇形 OAP ＝ イ $\boxed{\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot x=\dfrac{x}{2}}$

△OAT ＝ ウ $\boxed{\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x=\dfrac{\tan x}{2}}$

よって，$\sin x<x<\tan x$

各辺を $\sin x\ (>0)$ で割ると，$1<\dfrac{x}{\sin x}<\dfrac{1}{\cos x}$

各辺の逆数をとると，エ $\boxed{\cos x<\dfrac{\sin x}{x}<1}$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x=1$ なので，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=$ オ $\boxed{1}$ …終

（この後，$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{\sin x}{x}=1$ も示さなければならないが省略する）

27 ［$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ の極限のまとめ］ 26 の結果をまとめなさい。

(1) ア $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1}$ （今後利用するので覚えておくこと）

(2) x が 0 に十分近いとき，イ $\boxed{\sin x\fallingdotseq x}$

28 ［$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ の極限の利用］ 次の極限値を求めなさい。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{3x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3}$

$=1\cdot\dfrac{1}{3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ …答

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot4$

$=1\cdot4$

$=\mathbf{4}$ …答

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5}{2}$

$=1\cdot1\cdot\dfrac{5}{2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ …答

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}$ （$\leftarrow t=\dfrac{1}{x}$ とおいた）

$=\mathbf{1}$ …答

(5) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sqrt{x}$

$=1\cdot0$

$=\mathbf{0}$ …答

(6) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x^2}$

$\displaystyle=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}$

$=\infty$ …答

《注》$x\to0$ の場合は，極限は存在しない。