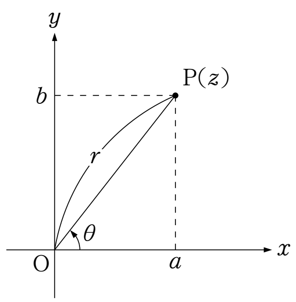
数学3　複素数平面の tutorial　No.5

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2　複素数の極形式

$\boxed{20}$ ［**極形式**］ 0 でない複素数 $z=a+bi$ の表す点を P とする。動径 OP の長さを r とし，実軸の正の部分を始線とする OP の一般角を θ とする。



(1) z を r と θ で表すと，

$z=\boxed{\text{ア}}$

これを複素数 z の $\boxed{\text{イ}}$ という。

(2) $r=\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{エ}}$

(3) 角 θ を z の $\boxed{\text{オ}}$ といい，$\boxed{\text{カ}}$ で表す。arg はアーギュメントと読む。

(4) $\cos\theta=\boxed{\text{キ}}$，$\sin\theta=\boxed{\text{ク}}$

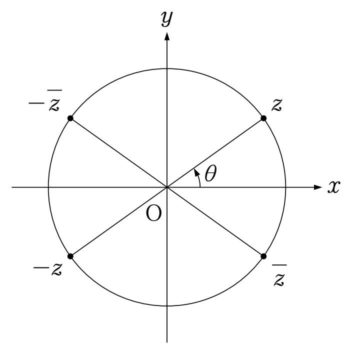
$\boxed{21}$ ［**偏角**］ 次の複素数の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めなさい。

(1) $3+\sqrt{3}i$　　(2) $-4i$

$\boxed{22}$ ［**標準形→極形式**］ 次の複素数を極形式で表しなさい。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $1+\sqrt{3}i$　　(2) $5-5i$

$\boxed{23}$ ［**共役複素数の絶対値・偏角**］ $|z|=r$，$\arg z=\theta$ のとき，次が成り立つ。



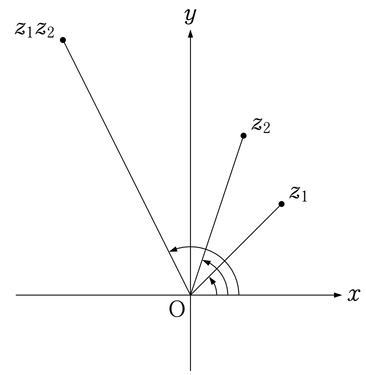
$|\overline{z}|=\boxed{\text{ア}}$　　$\arg\overline{z}=\boxed{\text{イ}}$

$|-z|=\boxed{\text{ウ}}$　　$\arg(-z)=\boxed{\text{エ}}$

$|-\overline{z}|=\boxed{\text{オ}}$　　$\arg(-\overline{z})=\boxed{\text{カ}}$

偏角についての等式は，2π の整数倍の違いは無視して一致していることを示している。（合同式の $\equiv$ と同じ）

$\boxed{24}$ ［**積・商の絶対値・偏角**］ 2 つの複素数 z_1，z_2 の積，商について次が成り立つ。



$|z_1|=r_1$，$\arg z_1=\theta_1$，

$|z_2|=r_2$，$\arg z_2=\theta_2$ のとき，

$|z_1z_2|=\boxed{\text{ア}}$　　$\arg z_1z_2=\boxed{\text{イ}}$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\boxed{\text{ウ}}$　　$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\boxed{\text{エ}}$

すなわち，

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$z_1z_2=\boxed{\text{オ}}$　　…… ①

$\dfrac{z_1}{z_2}=\boxed{\text{カ}}$　　…… ②

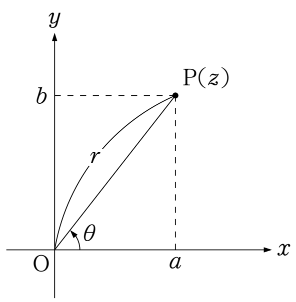
$\boxed{25}$ ［**積・商の絶対値・偏角**］ $\boxed{24}$ の ①，② を証明しなさい。

数学3　複素数平面の tutorial　No.5

解答

2　複素数の極形式

20 ［極形式］ 0 でない複素数 $z=a+bi$ の表す点を P とする。動径 OP の長さを r とし，実軸の正の部分を始線とする OP の一般角を θ とする。



(1) z を r と θ で表すと，

$z=$ ［ア $r(\cos\theta+i\sin\theta)$］

これを複素数 z の ［イ 極形式］ という。

(2) $r=$ ［ウ $|z|$］ $=$ ［エ $\sqrt{a^2+b^2}$］

(3) 角 θ を z の ［オ 偏角］ といい，［カ $\arg z$］ で表す。arg はアーギュメントと読む。

(4) $\cos\theta=$ ［キ $\dfrac{a}{r}$］，$\sin\theta=$ ［ク $\dfrac{b}{r}$］

21 ［偏角］ 次の複素数の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めなさい。

(1) $3+\sqrt{3}i$

解答 $z=3+\sqrt{3}i$ とすると，

$|z|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ …答

(2) $-4i$

解答 $z=-4i$ とすると，

$|z|=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$

$\cos\theta=\dfrac{0}{4}=0$

$\sin\theta=\dfrac{-4}{4}=-1$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3\pi}{4}}$ …答

22 ［標準形→極形式］ 次の複素数を極形式で表しなさい。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $1+\sqrt{3}i$

解答 $z=1+\sqrt{3}i$ とすると，

$|z|=2$ より，

$z=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\quad=\boldsymbol{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$ …答

(2) $5-5i$

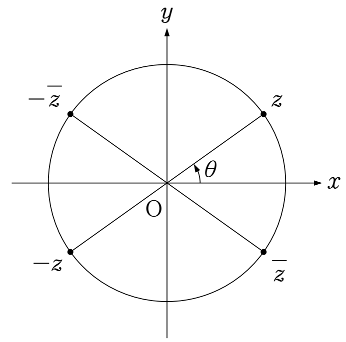
解答 $z=5-5i$ とすると，

$|z|=5\sqrt{2}$ より，

$z=5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$\quad=\boldsymbol{5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)}$ …答

23 ［共役複素数の絶対値・偏角］ $|z|=r$，$\arg z=\theta$ のとき，次が成り立つ。



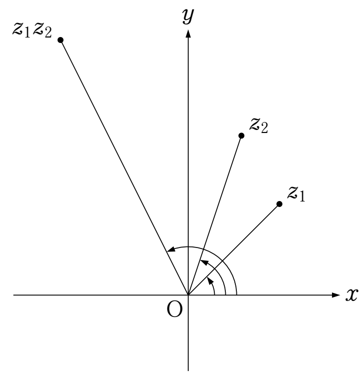
$|\overline{z}|=$ ［ア r］　　$\arg\overline{z}=$ ［イ $-\theta$］

$|-z|=$ ［ウ r］　　$\arg(-z)=$ ［エ $\pi+\theta$］

$|-\overline{z}|=$ ［オ r］　　$\arg(-\overline{z})=$ ［カ $\pi-\theta$］

偏角についての等式は，2π の整数倍の違いは無視して一致していることを示している。（合同式の $\equiv$ と同じ）

24 ［積・商の絶対値・偏角］ 2 つの複素数 z_1，z_2 の積，商について次が成り立つ。



$|z_1|=r_1$，$\arg z_1=\theta_1$，

$|z_2|=r_2$，$\arg z_2=\theta_2$ のとき，

$|z_1z_2|=$ ［ア r_1r_2］　　$\arg z_1z_2=$ ［イ $\theta_1+\theta_2$］

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=$ ［ウ $\dfrac{r_1}{r_2}$］　　$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=$ ［エ $\theta_1-\theta_2$］

すなわち，

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$z_1z_2=$ ［オ $r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$］ …… ①

$\dfrac{z_1}{z_2}=$ ［カ $\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$］ …… ②

25 ［積・商の絶対値・偏角］ 24 の ①，② を証明しなさい。

解答 三角関数の加法定理を使って証明する。

① $z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$\quad=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$\quad=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ …終

② $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}\{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$ …終