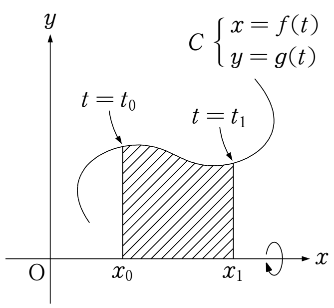
数学3　積分の応用の tutorial　No.10

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{30}$ ［**パラメータ曲線の回転体**］（$\boxed{9}$ の説明とほとんど同じ）

媒介変数 t によって $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線 C がある。
$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，$f(t)$ は単調に増加し，
$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，常に $g(t) \geqq 0$ とする。
$f(t_0)=x_0$，$f(t_1)=x_1$ とすると，$f(t)$ は単調増加なので，$x_0 \leqq x_1$
このとき，曲線 C と x 軸，2 直線 $x=x_0$，$x=x_1$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，



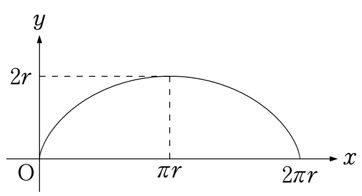
$V=$ ア［　　　　］

x を t に置換すると，$dx=f'(t)dt$ であり，積分区間の対応は $\begin{array}{c|c} x & x_0 \to x_1 \\ \hline t & t_0 \to t_1 \end{array}$ なので，

$V=$ イ［　　　　］

$f(t)$ が単調に減少するときは $x_0 \geqq x_1$ となり，上の公式のままでは V が負になる。この場合，積分区間の上端と下端を逆にすることで対処すればよい。$f(t)$ が単調でないときは，単調な区間に切って考える。

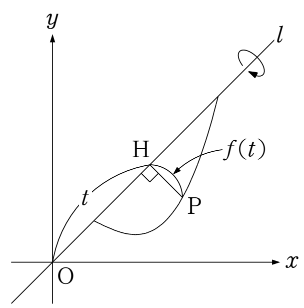
$\boxed{31}$ ［**パラメータ曲線の回転体**］ 半径 r の円を転がしてできるサイクロイド $x=r(\theta-\sin\theta)$，$y=r(1-\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を考える。この曲線と x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。　［啓林館 p.238］



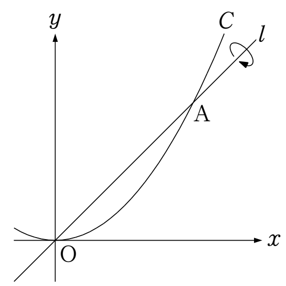
$\boxed{32}$ ［**一般の直線のまわりの回転体**］ 図形 S を一般の直線 l のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めるときは，直線 l を新しく t 軸として，t 軸に垂直な平面で切ったときの断面積を考えればよい。
右の図で，$a \leqq t \leqq b$ における回転体の体積は，

$V=$ ア［　　　　］

もちろん，線分 PH が図形 S の外部を通ったり，直線 l が図形 S の内部を通る場合など，変則的な状況があれば，それなりの対処が必要である。



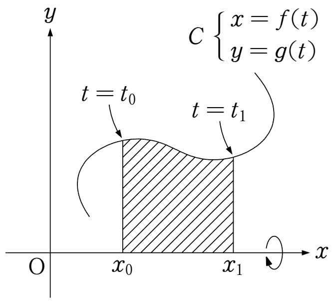
$\boxed{33}$ ［**一般の直線のまわりの回転体**］ 放物線 $C: y=x^2$ と直線 $l: y=x$ によって囲まれた図形を直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めなさい。　［啓林館 p.239］



数学3 積分の応用のtutorial No.10

解答

30 ［パラメータ曲線の回転体］（ 9 の説明とほとんど同じ）



媒介変数 t によって $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線 C がある。

$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，$f(t)$ は単調に増加し，

$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，常に $g(t) \geqq 0$ とする。

$f(t_0)=x_0$，$f(t_1)=x_1$ とすると，$f(t)$ は単調増加なので，$x_0 \leqq x_1$

このとき，曲線 C と x 軸，2 直線 $x=x_0$，$x=x_1$ で囲まれた部分を

x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，

$V=$ ア $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}\pi y^2\,dx$

x を t に置換すると，$dx=f'(t)dt$ であり，積分区間の対応は

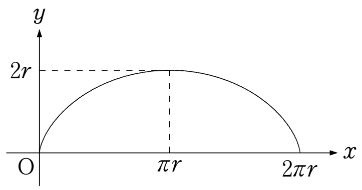
x	$x_0 \to x_1$
t	$t_0 \to t_1$

なので，

$V=$ イ $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1}\pi\{g(t)\}^2 f'(t)\,dt$

$f(t)$ が単調に減少するときは $x_0 \geqq x_1$ となり，上の公式のままでは V が負になる。この場合，積分区間の上端と下端を逆にすることで対処すればよい。$f(t)$ が単調でないときは，単調な区間に切って考える。

31 ［パラメータ曲線の回転体］ 半径 r の円を転がしてできるサイクロイド $x=r(\theta-\sin\theta)$，$y=r(1-\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を考える。この曲線と x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。 ［啓林館 p.238］



解答 $V=\displaystyle\int_0^{2\pi r}\pi y^2\,dx$

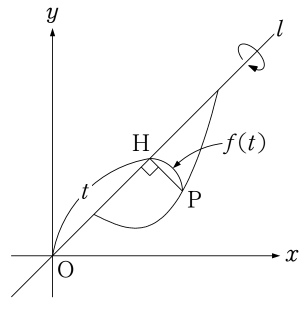
$x=r(\theta-\sin\theta)$ より，$dx=r(1-\cos\theta)d\theta$

積分区間の対応は

x	$0 \to 2\pi r$
t	$0 \to 2\pi$

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{2\pi}\pi\{r(1-\cos\theta)\}^2 r(1-\cos\theta)\,d\theta\\
&=\pi r^3\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^3\,d\theta\\
&=\pi r^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos\theta+3\cos^2\theta-\cos^3\theta)\,d\theta\\
&=\pi r^3\int_0^{2\pi}(1+3\cos^2\theta)\,d\theta \qquad \leftarrow \cos\theta \text{ と } \cos^3\theta \text{ は 1 周期積分すると } 0\\
&=\pi r^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\\
&=\pi r^3\left[\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}\\
&=\mathbf{5\pi^2 r^3} \quad \cdots \text{答}
\end{aligned}$$

32 ［一般の直線のまわりの回転体］ 図形 S を一般の直線 l のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めるときは，直線 l を新しく t 軸として，t 軸に垂直な平面で切ったときの断面積を考えればよい。

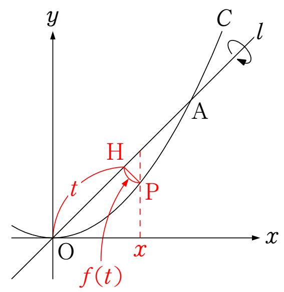


右の図で，$a \leqq t \leqq b$ における回転体の体積は，

$V=$ ア $\displaystyle\int_a^b \pi\{f(t)\}^2\,dt$

もちろん，線分 PH が図形 S の外部を通ったり，直線 l が図形 S の内部を通る場合など，変則的な状況があれば，それなりの対処が必要である。

33 ［一般の直線のまわりの回転体］ 放物線 $C: y=x^2$ と直線 $l: y=x$ によって囲まれた図形を直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めなさい。 ［啓林館 p.239］



解答 直線 l と放物線 C の交点のうち，O ではない方を A とすると，

A$(1,\ 1)$ であり，$\mathrm{OA}=\sqrt{2}$ である。

また，放物線 C の O から A の間の部分に点 P$(x,\ x^2)$ をとり，

P から直線 l におろした垂線を PH とすると，

$$\mathrm{PH}=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{OH}=\sqrt{2}x-\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$$

ここで，$\mathrm{OH}=t$，$\mathrm{PH}=f(t)$ とおく。すなわち，$t=\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}$，$f(t)=\dfrac{x-x^2}{\sqrt{2}}$

$t=\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}}$ より，$dt=\dfrac{1+2x}{\sqrt{2}}dx$

積分区間の対応は

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \sqrt{2}$

よって，求める体積 V は，

$$\begin{aligned}
V&=\int_0^{\sqrt{2}}\pi\{f(t)\}^2\,dt\\
&=\int_0^1\pi\left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2\frac{1+2x}{\sqrt{2}}\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x-x^2)^2(1+2x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(2x^5-3x^4+x^2)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}x^6-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi}{30\sqrt{2}}} \quad \cdots \text{答}
\end{aligned}$$