数学3　積分の tutorial　No.7

名前

28 ［**部分積分法**］ 積の微分法を逆向きに使うような積分法を作りたい。

(1) まず積の微分法を確認する。微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，その積 $f(x)g(x)$ を x で微分すると，$\{f(x)g(x)\}'=$ ア［　　　　］ となる。

(2) (1) の式を $f(x)g'(x)$ について解くと，

イ［　　　　］

両辺を x で積分すると，

ウ［　　　　］ …… ①

これを公式として今後利用する。

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(3) さらに，① の g' を g に，g を G に置き直すと，（G は g の原始関数）

エ［　　　　］

左辺の被積分関数が $f(x)g(x)$ となり，この公式が "積の積分法" のようにはたらくことが分かる。

覚え方

この公式は右辺にも $\int$ があるので，左辺の積分が完了するわけではなく，別の積分に移し替えているだけである。つまり，積分法として利用するときは，右辺の積分の方が易しくなっていないと意味がない。そのためには積の関数のどちらを微分，どちらを積分にするのかうまく選ぶ必要がある。

29 ［**部分積分法（n 次関数×三角関数）**］ 不定積分 $\int (2x+3)\cos x\,dx$ を求めなさい。

30 ［**部分積分法（n 次関数×指数関数）**］ 不定積分 $\int (2x+1)e^{-x}dx$ を求めなさい。　［黄チャート p.289］

31 ［**部分積分法（2 回利用）**］ 不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を求めなさい。　［黄チャート p.290］

32 ［**部分積分法（n 次関数×対数関数）**］ 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\int x\log x\,dx$

(2) $\int \log x\,dx$

$\int \log x\,dx = x\log x - x + C$ はよく出るので，結果を覚えておいてもよい。

数学3 積分の tutorial No.7

解答

28 ［**部分積分法**］ 積の微分法を逆向きに使うような積分法を作りたい。

(1) まず積の微分法を確認する。微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，その積 $f(x)g(x)$ を x で微分すると，$\{f(x)g(x)\}' =$ ア $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ となる。

(2) (1) の式を $f(x)g'(x)$ について解くと，

イ $f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x)$

両辺を x で積分すると，

ウ $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$ ……①

これを公式として今後利用する。

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

(3) さらに，① の g' を g に，g を G に置き直すと，（G は g の原始関数）

エ $\displaystyle\int f(x)g(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$

左辺の被積分関数が $f(x)g(x)$ となり，この公式が "積の積分法" のようにはたらくことが分かる。

覚え方

ビブン

そのまま

$$\int f(x)g(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$$

セキブン

セキブン

ビブンは一方だけ
セキブンは両方

この公式は右辺にも $\int$ があるので，左辺の積分が完了するわけではなく，別の積分に移し替えているだけである。つまり，積分法として利用するときは，右辺の積分の方が易しくなっていないと意味がない。そのためには積の関数のどちらを微分，どちらを積分にするのかうまく選ぶ必要がある。

29 ［**部分積分法（n 次関数×三角関数）**］ 不定積分 $\displaystyle\int(2x+3)\cos x\,dx$ を求めなさい。

解答 $\displaystyle\int(2x+3)\cos x\,dx$ ← $2x+3$ を微分側，$\cos x$ を積分側にする。

$\displaystyle=(2x+3)\sin x-\int 2\sin x\,dx$

$=\boldsymbol{(2x+3)\sin x+2\cos x+C}$ … 答

30 ［**部分積分法（n 次関数×指数関数）**］ 不定積分 $\displaystyle\int(2x+1)e^{-x}dx$ を求めなさい。 ［黄チャート p.289］

解答 $\displaystyle\int(2x+1)e^{-x}dx$ ← $2x+1$ を微分側，e^{-x} を積分側にする。

$\displaystyle=(2x+1)(-e^{-x})-\int 2(-e^{-x})dx$

$\displaystyle=-(2x+1)e^{-x}+2\int e^{-x}dx$

$=-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+C$

$=\boldsymbol{-(2x+3)e^{-x}+C}$ … 答

31 ［**部分積分法（2 回利用）**］ 不定積分 $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ を求めなさい。 ［黄チャート p.290］

解答 $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$ ← x^2 を微分側，$\cos x$ を積分側にする。

$\displaystyle=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx$ ← $2x$ を微分側，$\sin x$ を積分側にする。

$\displaystyle=x^2\sin x-\left\{2x(-\cos x)-\int 2(-\cos x)dx\right\}$

$\displaystyle=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos x\,dx$

$=\boldsymbol{x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C}$ … 答

32 ［**部分積分法（n 次関数×対数関数）**］ 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$ ← x を積分側，$\log x$ を微分側にする。

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C}$ … 答

(2) $\displaystyle\int\log x\,dx$

$\displaystyle=\int 1\cdot\log x\,dx$ ← 1 を積分側，$\log x$ を微分側にする。

$\displaystyle=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=x\log x-\int dx$

$=\boldsymbol{x\log x-x+C}$ … 答

$\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-x+C$ はよく出るので，結果を覚えておいてもよい。