数学3　数列の極限のtutorial　No.2

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2　極限の計算

$\boxed{6}$ ［**極限値の性質**］ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \beta$ のとき，次が成り立つ。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = \boxed{\text{ア}}$　（k は定数）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \boxed{\text{イ}}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \boxed{\text{ウ}}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \boxed{\text{エ}}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \boxed{\text{オ}}$　（ただし $\beta \neq 0$）

　つまり，$\lim(a_n+b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ のように，lim は数列の和・差・積・商に対して分配できる。ただし，分配先の $\lim a_n$ や $\lim b_n$ の値が存在する（収束する）ことが条件である。

$\boxed{7}$ ［**極限の計算**］ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$ のとき，次の極限値を求めなさい。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} (2a_n - 3b_n)$　（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n}{b_n - 4}$　（3）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n {b_n}^2$

$\boxed{8}$ ［**発散の判定**］ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ のとき，次が成り立つ。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \boxed{\text{ア}}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c) = \boxed{\text{イ}}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (c - a_n) = \boxed{\text{ウ}}$　（c は定数）

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \boxed{\text{エ}}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = \boxed{\text{オ}}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (-ka_n) = \boxed{\text{カ}}$　（k は正の定数）

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n)$ や $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ については，収束する場合も発散する場合もある。

$\boxed{9}$ ［**発散の判定**］ 次の数列の極限を調べなさい。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 + 4n)$　（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \left(6 - \dfrac{1}{2}n^2\right)$　（3）$\lim\limits_{n\to\infty} (-n \cdot 2^n)$

　形式的に，$\infty - \infty$，$\infty \times 0$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ の形を不定形といい，これらの極限は不定形でない形に式変形してから極限を判断する必要がある。（注意：$\infty - \infty$ のような式は定義されていないので答案には書かないように）

$\boxed{10}$ ［**不定形の極限**］ 次の数列の極限を調べなさい。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} (n^2 - 4n)$　（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{5n-2}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{n^2+n-6}$　（4）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3}{n^2-8n}$

（5）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-7)(n+1)(n+6)}{4n^3+5}$

$\boxed{11}$ ［**$\sqrt{\ }$ を含む不定形の極限**］ 次の数列の極限を調べなさい。

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+5} + \sqrt{3n}}$　（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+5} - \sqrt{n})$

数学3　数列の極限の tutorial　No.2

解答

2　極限の計算

6 ［**極限値の性質**］ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$ のとき，次が成り立つ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = \boxed{{}^{ア}\ k\alpha}$　（k は定数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \boxed{{}^{イ}\ \alpha+\beta}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-b_n) = \boxed{{}^{ウ}\ \alpha-\beta}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \boxed{{}^{エ}\ \alpha\beta}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \boxed{{}^{オ}\ \dfrac{\alpha}{\beta}}$　（ただし $\beta\neq 0$）

つまり，$\lim(a_n+b_n)=\lim a_n+\lim b_n$ のように，lim は数列の和・差・積・商に対して分配できる。ただし，分配先の $\lim a_n$ や $\lim b_n$ の値が存在する（収束する）ことが条件である。

7 ［**極限の計算**］ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-2$ のとき，次の極限値を求めなさい。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (2a_n-3b_n)$

$=2\times5-3\times(-2)$

$=10+6$

$=\mathbf{16}$　$\cdots$ 答

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3a_n}{b_n-4}$

$=\dfrac{3\times5}{-2-4}$

$=-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$　$\cdots$ 答

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n{b_n}^2$

$=5\times(-2)^2$

$=\mathbf{20}$　$\cdots$ 答

8 ［**発散の判定**］ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ について，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$ のとき，次が成り立つ。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+b_n) = \boxed{{}^{ア}\ \infty}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n+c) = \boxed{{}^{イ}\ \infty}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (c-a_n) = \boxed{{}^{ウ}\ -\infty}$　（c は定数）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n = \boxed{{}^{エ}\ \infty}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = \boxed{{}^{オ}\ \infty}$，　$\lim\limits_{n\to\infty} (-ka_n) = \boxed{{}^{カ}\ -\infty}$　（k は正の定数）

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n-b_n)$ や $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ については，収束する場合も発散する場合もある。

9 ［**発散の判定**］ 次の数列の極限を調べなさい。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+4n)$

$=\infty$　$\cdots$ 答

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(6-\dfrac{1}{2}n^2\right)$

$=-\infty$　$\cdots$ 答

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (-n\cdot2^n)$

$=-\infty$　$\cdots$ 答

形式的に，$\infty-\infty$，$\infty\times0$，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\dfrac{0}{0}$ の形を不定形といい，これらの極限は不定形でない形に式変形してから極限を判断する必要がある。（注意：$\infty-\infty$ のような式は定義されていないので答案には書かないように）

10 ［**不定形の極限**］ 次の数列の極限を調べなさい。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2-4n)$　←$\infty-\infty$ の不定形

$=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1-\dfrac{4}{n}\right)$　←n^2 でくくった

$=\infty$　$\cdots$ 答

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{5n-2}$　←$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{5-\dfrac{2}{n}}$　←分子・分母を n で割った

$=\dfrac{3+0}{5-1}$

$=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$　$\cdots$ 答

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{n^2+n-6}$　←$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{4}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{6}{n^2}}$　←分子・分母を n^2 で割った

$=\dfrac{0}{1}$

$=\mathbf{0}$　$\cdots$ 答

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3}{n^2-8n}$　←$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\dfrac{3}{n^2}}{1-\dfrac{8}{n}}$　←分子・分母を n^2 で割った

$=\infty$　$\cdots$ 答

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-7)(n+1)(n+6)}{4n^3+5}$　←$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(2-\dfrac{7}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{6}{n}\right)}{4+\dfrac{5}{n^3}}$　←分子・分母を n^3 で割った

$=\dfrac{(2-0)(1+0)(1+0)}{4+0}$

$=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$　$\cdots$ 答

11 ［$\sqrt{\ }$ **を含む不定形の極限**］ 次の数列の極限を調べなさい。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+5}+\sqrt{3n}}$　←$\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{5}{n}}+\sqrt{3}}$　←分子・分母 $\div\sqrt{n}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{3}}$

$=\sqrt{\mathbf{3}}-\sqrt{\mathbf{2}}$　$\cdots$ 答

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$　←分母が $\infty-\infty$

$=\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})$　←分母を有理化

$=\infty$　$\cdots$ 答

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$　←$\infty-\infty$ の不定形

$=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}$　←分子を有理化

$=\mathbf{0}$　$\cdots$ 答