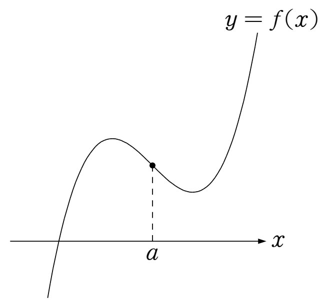
数学3　微分の応用の tutorial　No.9

名前

4　第2次導関数とグラフ

$\boxed{33}$ ［**グラフの凹凸と変曲点**］ 関数 $f(x)$ は第2次導関数 $f''(x)$ をもつとする。



(1) $f''(x)>0$ である区間では，$f'(x)$ の値が増加するので，接線の傾きが増加する。このとき，グラフは $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) $f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値が減少するので，接線の傾きが減少する。このとき，グラフは $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) グラフの凹凸が入れかわる境目の点を $\boxed{\text{ウ}}$ という。

(4) $\boxed{\text{エ}}$，かつ，$x=a$ の前後で $\boxed{\text{オ}}$ が変わるならば，$x=a$ は $y=f(x)$ のグラフの変曲点である。

(5) 「$x=a$ が変曲点 $\Longrightarrow$ $f''(a)=0$」は成り立つが，逆は成り立たない。

$\boxed{34}$ ［**3次関数のグラフの凹凸・変曲点**］ 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=x^3-6x^2+8x+4$ のグラフの凹凸を調べ，変曲点があれば求めなさい。

(2) 3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ のグラフには変曲点が存在することを証明しなさい。

$\boxed{35}$ ［**グラフの変曲点**］ 次の関数のグラフの凹凸を調べ，変曲点があれば求めなさい。

(1) $y=\sin x$　　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

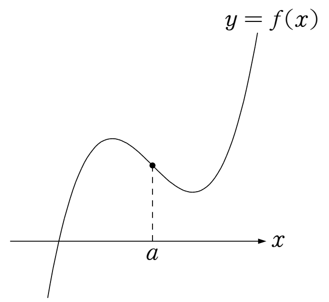
(2) $y=\log(1+x^2)$

$\boxed{36}$ ［**変曲点であるための条件**］ $f''(a)=0$ となる点 $x=a$ が変曲点にならないような関数 $f(x)$ の例を挙げなさい。

解答

4　第2次導関数とグラフ

33 ［**グラフの凹凸と変曲点**］ 関数 $f(x)$ は第2次導関数 $f''(x)$ をもつとする。



(1) $f''(x)>0$ である区間では，$f'(x)$ の値が増加するので，接線の傾きが増加する。このとき，グラフは ア 下に凸 である。

(2) $f''(x)<0$ である区間では，$f'(x)$ の値が減少するので，接線の傾きが減少する。このとき，グラフは イ 上に凸 である。

(3) グラフの凹凸が入れかわる境目の点を ウ 変曲点 という。

(4) エ $f''(a)=0$ ，かつ，$x=a$ の前後で オ $f''(x)$ の符号 が変わるならば，$x=a$ は $y=f(x)$ のグラフの変曲点である。

(5) 「$x=a$ が変曲点 $\Longrightarrow$ $f''(a)=0$」は成り立つが，逆は成り立たない。

34 ［**3次関数のグラフの凹凸・変曲点**］ 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y=x^3-6x^2+8x+4$ のグラフの凹凸を調べ，変曲点があれば求めなさい。

解答 $f(x)=x^3-6x^2+8x+4$ とおく。

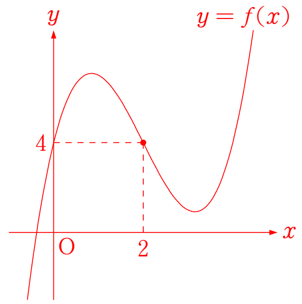
$f'(x)=3x^2-12x+8$

$f''(x)=6x-12$

$f''(x)=0$ とすると，$x=2$

曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	2	$\cdots$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	4	$\smile$



$x<2$ で上に凸，$x>2$ で下に凸

変曲点は $(2,\ 4)$ …答

(2) 3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a \neq 0)$ のグラフには変曲点が存在することを証明しなさい。

解答 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおく。

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$f''(x)=0$ とすると，$x=-\dfrac{b}{3a}$

$f''(x)$ は1次関数なので，$x=-\dfrac{b}{3a}$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わる。

よって，$x=-\dfrac{b}{3a}$ は変曲点である。　…終

参考 3次関数のグラフは変曲点に関して点対称である。証明するには，変曲点が原点にくるようにグラフを平行移動し，それが奇関数になっていることを示せばよい。

35 ［**グラフの変曲点**］ 次の関数のグラフの凹凸を調べ，変曲点があれば求めなさい。

(1) $y=\sin x$　　$(0 \leqq x \leqq 2\pi)$

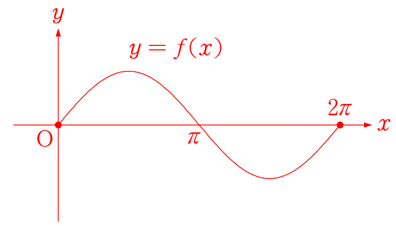
解答 $f(x)=\sin x$ とおく。

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f''(x)=0$ とすると，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で，$x=0,\ \pi,\ 2\pi$

曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次の表のようになる。



x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
f''	0	$-$	0	$+$	0
f	0	$\frown$	0	$\smile$	0

$0<x<\pi$ で上に凸，$\pi<x<2\pi$ で下に凸

変曲点は $(\pi,\ 0)$ …答

(2) $y=\log(1+x^2)$

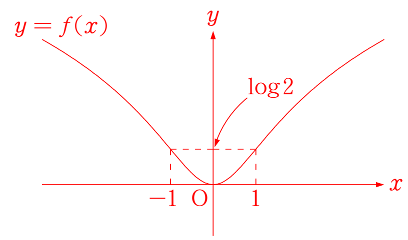
解答 $f(x)=\log(1+x^2)$ とおく。

$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$f''(x)=\dfrac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$

$f''(x)=0$ とすると，$x=\pm 1$

曲線 $y=f(x)$ の凹凸は次の表のようになる。



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\frown$	$\log 2$	$\smile$	$\log 2$	$\frown$

$x<-1$，$x>1$ で上に凸，$-1<x<1$ で下に凸

変曲点は $(-1,\ \log 2)$，$(1,\ \log 2)$ …答

36 ［**変曲点であるための条件**］ $f''(a)=0$ となる点 $x=a$ が変曲点にならないような関数 $f(x)$ の例を挙げなさい。

解答 $f''(a)=0$ となる点 $x=a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わらないような例を考えればよい。

例えば，$f''(x)=0$ が2次方程式で重解をもつ場合を考えると，$f(x)=x^4$ がある。

このとき，$f''(x)=12x^2$

$f''(0)=0$ であるが，$x=0$ の前後はどちらも $f''(x)>0$ であり，$x=0$ は変曲点ではない。