数学3　微分の tutorial　No.12

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

5　対数関数・指数関数の導関数

$\boxed{51}$ ［**対数関数の導関数**］ $a>0$，$a \neq 0$ として，対数関数 $\log_a x$ の導関数を考える。

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \boxed{\text{ア}} \qquad (\leftarrow \text{導関数の定義より})$$

$$= \lim_{h \to 0} \boxed{\text{イ}} \qquad (\leftarrow \log \text{の性質より})$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1 + \frac{h}{x}\right) \cdots\cdots ①$$

$\dfrac{h}{x} = t$ とおくと，$h \to 0$ のとき $t \to 0$

$$① = \lim_{\boxed{\text{ウ}}} \boxed{\text{エ}} \qquad (\leftarrow h \text{を消した})$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \boxed{\text{オ}} \cdots\cdots ② \qquad (\leftarrow \log \text{の性質より})$$

$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は $t \to 0$ のとき，$\boxed{\text{カ}}$（ネイピア数）に収束することが知られている。この値を $\boxed{\text{キ}}$ で表す。すなわち，$\boxed{\text{ク}}$ と定義する。

この e を使うと，

$$② = \frac{1}{x} \log_a e$$

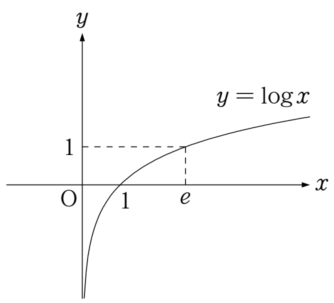
$$= \boxed{\text{ケ}} \cdots\cdots ③ \qquad (\leftarrow \text{底の変換公式より})$$

e を底とする対数 $\log_e x$ を $\boxed{\text{コ}}$ といい，底の e を省略して $\log x$ と書くことが多い。

$$③ = \boxed{\text{サ}} \qquad (\leftarrow \text{底の } e \text{ を省略した})$$

ここまでをまとめると，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$ である。

特に，$a = e$ のときは，$\boxed{\text{シ}}$ となる。



$\boxed{52}$ ［**対数関数の導関数のまとめ**］ $\boxed{51}$ の結果をまとめなさい。

$$(\log_a x)' = \boxed{\text{ア}} \qquad (a>0,\ a \neq 0)$$

$$(\log x)' = \boxed{\text{イ}}$$

これらは今後の計算に利用するので覚えておくこと。

$\boxed{53}$ ［**log を含む関数の微分**］ 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \log(2x+3)$

(2) $y = \log(x^2+x+4)$

(3) $y = \log_2(2x+3)$

(4) $y = \log_{10}(x^2+x+4)$

(5) $y = x\log x - x$

(6) $y = (\log x)^2$

数学3 微分の tutorial No.12

解答

5 対数関数・指数関数の導関数

51 ［**対数関数の導関数**］ $a>0$，$a\neq 1$ として，対数関数 $\log_a x$ の導関数を考える。

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\boxed{^{ア}\ \frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}}$$ （←導関数の定義より）

$$= \lim_{h\to 0}\boxed{^{イ}\ \frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}}$$ （← log の性質より）

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) \cdots\cdots ①$$

$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$

$$① = \lim_{\boxed{^{ウ}\ t\to 0}}\boxed{^{エ}\ \frac{1}{xt}\log_a(1+t)}$$ （← h を消した）

$$= \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\boxed{^{オ}\ \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} \cdots\cdots ②$$ （← log の性質より）

$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は $t\to 0$ のとき，$\boxed{^{カ}\ 2.718281828459\cdots\cdots}$（ネイピア数）に収束することが知られている。この値を $\boxed{^{キ}\ e}$ で表す。すなわち，$\boxed{^{ク}\ e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}$ と定義する。

この e を使うと，

$$② = \frac{1}{x}\log_a e$$

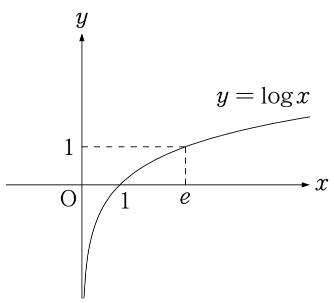
$$= \boxed{^{ケ}\ \frac{1}{x\log_e a}} \cdots\cdots ③$$ （←底の変換公式より）

e を底とする対数 $\log_e x$ を $\boxed{^{コ}\ 自然対数}$ といい，底の e を省略して $\log x$ と書くことが多い。

$$③ = \boxed{^{サ}\ \frac{1}{x\log a}}$$ （←底の e を省略した）

ここまでをまとめると，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ である。

特に，$a=e$ のときは，$\boxed{^{シ}\ (\log x)'=\frac{1}{x}}$ となる。



52 ［**対数関数の導関数のまとめ**］ 51 の結果をまとめなさい。

$$(\log_a x)' = \boxed{^{ア}\ \frac{1}{x\log a}} \quad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$(\log x)' = \boxed{^{イ}\ \frac{1}{x}}$$

これらは今後の計算に利用するので覚えておくこと。

53 ［**log を含む関数の微分**］ 次の関数を微分しなさい。

(1) $y=\log(2x+3)$

解答 $y' = \{\log(2x+3)\}'$

$$= \frac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{2x+3}} \ \cdots \text{答}$$

(2) $y=\log(x^2+x+4)$

解答 $y' = \{\log(x^2+x+4)\}'$

$$= \frac{1}{x^2+x+4}\cdot(x^2+x+4)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2x+1}{x^2+x+4}} \ \cdots \text{答}$$

(3) $y=\log_2(2x+3)$

解答 $y' = \{\log_2(2x+3)\}'$

$$= \frac{1}{(2x+3)\log 2}\cdot(2x+3)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{(2x+3)\log 2}} \ \cdots \text{答}$$

(4) $y=\log_{10}(x^2+x+4)$

解答 $y' = \{\log_{10}(x^2+x+4)\}'$

$$= \frac{1}{(x^2+x+4)\log 10}\cdot(x^2+x+4)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2x+1}{(x^2+x+4)\log 10}} \ \cdots \text{答}$$

(5) $y=x\log x-x$

解答 $y' = (x\log x-x)'$

$$= (x)'\log x + x(\log x)' - 1$$

$$= \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1$$

$$= \boldsymbol{\log x} \ \cdots \text{答}$$

(6) $y=(\log x)^2$

解答 $y' = \{(\log x)^2\}'$

$$= 2\log x\cdot(\log x)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\log x}{x}} \ \cdots \text{答}$$