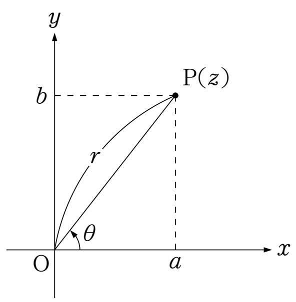
# 数学3　複素数平面の tutorial　No.5

解答

## 2　複素数の極形式

20 ［極形式］ 0 でない複素数 $z=a+bi$ の表す点を P とする。動径 OP の長さを $r$ とし，実軸の正の部分を始線とする OP の一般角を $\theta$ とする。




(1) $z$ を $r$ と $\theta$ で表すと，

$z=$ ア $r(\cos\theta+i\sin\theta)$

これを複素数 $z$ の イ 極形式 という。

(2) $r=$ ウ $|z|$ $=$ エ $\sqrt{a^2+b^2}$

(3) 角 $\theta$ を $z$ の オ 偏角 といい， カ $\arg z$ で表す。arg はアーギュメントと読む。

(4) $\cos\theta=$ キ $\dfrac{a}{r}$， $\sin\theta=$ ク $\dfrac{b}{r}$

21 ［偏角］ 次の複素数の偏角 $\theta$ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めなさい。

(1) $3+\sqrt{3}i$

解答 $z=3+\sqrt{3}i$ とすると，

$|z|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$ …答

(2) $-4i$

解答 $z=-4i$ とすると，

$|z|=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$

$\cos\theta=\dfrac{0}{4}=0$

$\sin\theta=\dfrac{-4}{4}=-1$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3\pi}{4}}$ …答

22 ［標準形→極形式］ 次の複素数を極形式で表しなさい。ただし，偏角 $\theta$ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1) $1+\sqrt{3}i$

解答 $z=1+\sqrt{3}i$ とすると，

$|z|=2$ より，

$z=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\quad=\boldsymbol{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$ …答

(2) $5-5i$

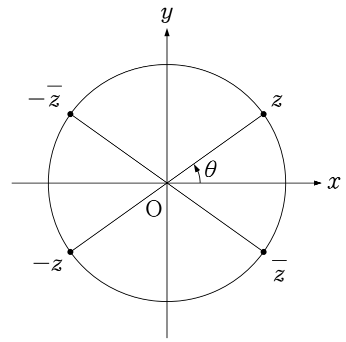
解答 $z=5-5i$ とすると，

$|z|=5\sqrt{2}$ より，

$z=5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$\quad=\boldsymbol{5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)}$ …答

23 ［共役複素数の絶対値・偏角］ $|z|=r$，$\arg z=\theta$ のとき，次が成り立つ。



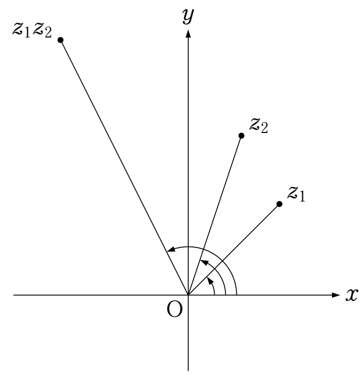

$|\bar{z}|=$ ア $r$　　$\arg\bar{z}=$ イ $-\theta$

$|-z|=$ ウ $r$　　$\arg(-z)=$ エ $\pi+\theta$

$|-\bar{z}|=$ オ $r$　　$\arg(-\bar{z})=$ カ $\pi-\theta$

偏角についての等式は，$2\pi$ の整数倍の違いは無視して一致していることを示している。（合同式の ≡ と同じ）

24 ［積・商の絶対値・偏角］ 2 つの複素数 $z_1$，$z_2$ の積，商について次が成り立つ。




$|z_1|=r_1$，$\arg z_1=\theta_1$，

$|z_2|=r_2$，$\arg z_2=\theta_2$ のとき，

$|z_1z_2|=$ ア $r_1r_2$　　$\arg z_1z_2=$ イ $\theta_1+\theta_2$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=$ ウ $\dfrac{r_1}{r_2}$　　$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=$ エ $\theta_1-\theta_2$

すなわち，

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$z_1z_2=$ オ $r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ …… ①

$\dfrac{z_1}{z_2}=$ カ $\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$ …… ②

25 ［積・商の絶対値・偏角］ 24 の ①，② を証明しなさい。

解答 三角関数の加法定理を使って証明する。

① $z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$\quad=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$\quad=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$ …終

② $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}\{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$ …終