

数学3 積分の応用のtutorial No.10

解答

30 [パラメータ曲線の回転体] (9)の説明とほとんど同じ)

媒介変数 t によって $x = f(t)$, $y = g(t)$ と表される曲線 C がある。

$t_0 \leq t \leq t_1$ の範囲で, $f(t)$ は単調に増加し,

$t_0 \leq t \leq t_1$ の範囲で, 常に $g(t) \geq 0$ とする。

$f(t_0) = x_0$, $f(t_1) = x_1$ とすると, $f(t)$ は単調増加なので, $x_0 \leq x_1$

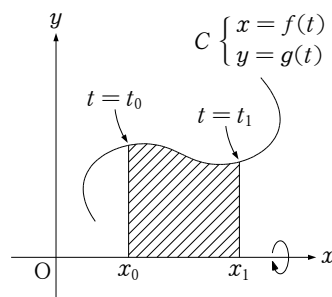
このとき, 曲線 C と x 軸, 2直線 $x = x_0$, $x = x_1$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V は,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \pi y^2 dx$$

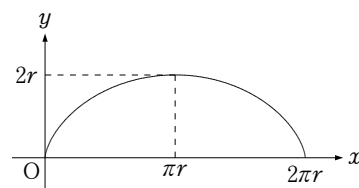
x を t に置換すると, $dx = f'(t)dt$ であり, 積分区間の対応は $\begin{matrix} x & | & x_0 \rightarrow x_1 \\ t & | & t_0 \rightarrow t_1 \end{matrix}$ なので,

$$V = \int_{t_0}^{t_1} \pi \{g(t)\}^2 f'(t) dt$$

$f(t)$ が単調に減少するときは $x_0 \geq x_1$ となり, 上の公式のままでは V が負になる。この場合, 積分区間の上端と下端を逆にすることで対処すればよい。 $f(t)$ が単調でないときは, 単調な区間に切って考える。



31 [パラメータ曲線の回転体] 半径 r の円を転がしてできるサイクロイド $x = r(\theta - \sin\theta)$, $y = r(1 - \cos\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を考える。この曲線と x 軸で囲まれた部分を, x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めなさい。 [啓林館 p.238]



解答 $V = \int_0^{2\pi r} \pi y^2 dx$

$x = r(\theta - \sin\theta)$ より, $dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$

積分区間の対応は $\begin{matrix} x & | & 0 \rightarrow 2\pi r \\ t & | & 0 \rightarrow 2\pi \end{matrix}$

$$V = \int_0^{2\pi} \pi \{r(1 - \cos\theta)\}^2 r(1 - \cos\theta) d\theta$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^3 d\theta$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos\theta + 3\cos^2\theta - \cos^3\theta) d\theta$$

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} (1 + 3\cos^2\theta) d\theta$$

← $\cos\theta$ と $\cos^3\theta$ は1周期積分すると0

$$= \pi r^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \pi r^3 \left[\frac{5}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

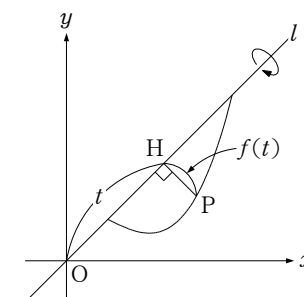
$$= 5\pi^2 r^3 \dots \text{答}$$

32 [一般の直線のまわりの回転体] 図形 S を一般の直線 l のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めるときは, 直線 l を新しく t 軸として, t 軸に垂直な平面で切ったときの断面積を考えればよい。

右の図で, $a \leq t \leq b$ における回転体の体積は,

$$V = \int_a^b \pi \{f(t)\}^2 dt$$

もちろん, 線分 PH が図形 S の外部を通ったり, 直線 l が図形 S の内部を通る場合など, 変則的な状況があれば, それなりの対処が必要である。



33 [一般の直線のまわりの回転体] 放物線 $C: y = x^2$ と直線 $l: y = x$ によって囲まれた図形を直線 l のまわりに1回転してできる回転体の体積 V を求めなさい。 [啓林館 p.239]

解答 直線 l と放物線 C の交点のうち, O ではない方を A とすると,

$A(1, 1)$ であり, $OA = \sqrt{2}$ である。

また, 放物線 C の O から A の間の部分に点 $P(x, x^2)$ をとり,

P から直線 l におろした垂線を PH とすると,

$$PH = \frac{x - x^2}{\sqrt{2}}$$

$$OH = \sqrt{2}x - \frac{x - x^2}{\sqrt{2}} = \frac{x + x^2}{\sqrt{2}}$$

ここで, $OH = t$, $PH = f(t)$ とおく。すなわち, $t = \frac{x + x^2}{\sqrt{2}}$, $f(t) = \frac{x - x^2}{\sqrt{2}}$

$t = \frac{x + x^2}{\sqrt{2}}$ より, $dt = \frac{1 + 2x}{\sqrt{2}} dx$

積分区間の対応は $\begin{matrix} x & | & 0 \rightarrow 1 \\ t & | & 0 \rightarrow \sqrt{2} \end{matrix}$

よって, 求める体積 V は,

$$V = \int_0^{\sqrt{2}} \pi \{f(t)\}^2 dt$$

$$= \int_0^1 \pi \left(\frac{x - x^2}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1 + 2x}{\sqrt{2}} dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (x - x^2)^2 (1 + 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \int_0^1 (2x^5 - 3x^4 + x^2) dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{30\sqrt{2}} \dots \text{答}$$

