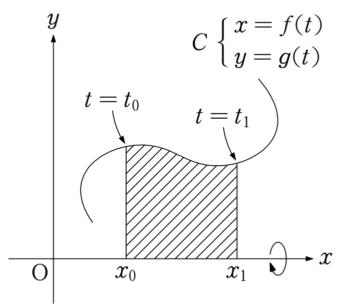
数学3　積分の応用の tutorial　No.10

名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{30}$ ［**パラメータ曲線の回転体**］（$\boxed{9}$ の説明とほとんど同じ）

媒介変数 t によって $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線 C がある。
$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，$f(t)$ は単調に増加し，
$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，常に $g(t) \geqq 0$ とする。
$f(t_0)=x_0$，$f(t_1)=x_1$ とすると，$f(t)$ は単調増加なので，$x_0 \leqq x_1$
このとき，曲線 C と x 軸，2 直線 $x=x_0$，$x=x_1$ で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，



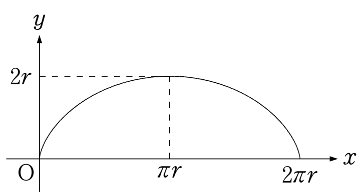
$V = \boxed{\text{ア}\qquad\qquad\qquad}$

x を t に置換すると，$dx = f'(t)dt$ であり，積分区間の対応は $\begin{array}{c|c} x & x_0 \to x_1 \\ \hline t & t_0 \to t_1 \end{array}$ なので，

$V = \boxed{\text{イ}\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$f(t)$ が単調に減少するときは $x_0 \geqq x_1$ となり，上の公式のままでは V が負になる。この場合，積分区間の上端と下端を逆にすることで対処すればよい。$f(t)$ が単調でないときは，単調な区間に切って考える。

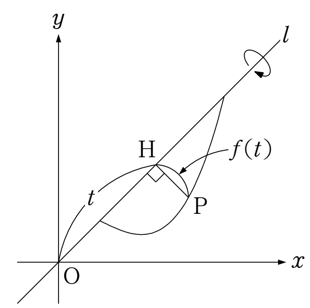
$\boxed{31}$ ［**パラメータ曲線の回転体**］ 半径 r の円を転がしてできるサイクロイド $x=r(\theta-\sin\theta)$，$y=r(1-\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ を考える。この曲線と x 軸で囲まれた部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい。 ［啓林館 p.238］



$\boxed{32}$ ［**一般の直線のまわりの回転体**］ 図形 S を一般の直線 l のまわりに回転してできる立体の体積 V を求めるときは，直線 l を新しく t 軸として，t 軸に垂直な平面で切ったときの断面積を考えればよい。
右の図で，$a \leqq t \leqq b$ における回転体の体積は，

$V = \boxed{\text{ア}\qquad\qquad\qquad\qquad}$

もちろん，線分 PH が図形 S の外部を通ったり，直線 l が図形 S の内部を通る場合など，変則的な状況があれば，それなりの対処が必要である。



$\boxed{33}$ ［**一般の直線のまわりの回転体**］ 放物線 $C : y=x^2$ と直線 $l : y=x$ によって囲まれた図形を直線 l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めなさい。 ［啓林館 p.239］