数学3　微分の tutorial　No.12

解答

5　対数関数・指数関数の導関数

51 ［**対数関数の導関数**］ $a>0$，$a \neq 0$ として，対数関数 $\log_a x$ の導関数を考える。

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0} \boxed{\text{ア}\ \frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}} \quad (\leftarrow \text{導関数の定義より})$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{\text{イ}\ \frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}} \quad (\leftarrow \log \text{の性質より})$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) \cdots\cdots ①$$

$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$

$$① = \lim_{\boxed{\text{ウ}\ t\to 0}} \boxed{\text{エ}\ \frac{1}{xt}\log_a(1+t)} \quad (\leftarrow h \text{を消した})$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\boxed{\text{オ}\ \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} \cdots\cdots ② \quad (\leftarrow \log \text{の性質より})$$

$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は $t\to 0$ のとき，$\boxed{\text{カ}\ 2.718281828459\cdots\cdots}$（ネイピア数）に収束することが知られている。この値を $\boxed{\text{キ}\ e}$ で表す。すなわち，$\boxed{\text{ク}\ e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}$ と定義する。

この e を使うと，

$$② = \frac{1}{x}\log_a e$$

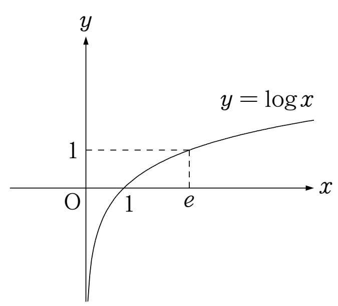
$$= \boxed{\text{ケ}\ \frac{1}{x\log_e a}} \cdots\cdots ③ \quad (\leftarrow \text{底の変換公式より})$$

e を底とする対数 $\log_e x$ を $\boxed{\text{コ}\ \text{自然対数}}$ といい，底の e を省略して $\log x$ と書くことが多い。

$$③ = \boxed{\text{サ}\ \frac{1}{x\log a}} \quad (\leftarrow \text{底の } e \text{ を省略した})$$

ここまでをまとめると，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ である。

特に，$a=e$ のときは，$\boxed{\text{シ}\ (\log x)' = \frac{1}{x}}$ となる。



52 ［**対数関数の導関数のまとめ**］ 51 の結果をまとめなさい。

$$(\log_a x)' = \boxed{\text{ア}\ \frac{1}{x\log a}} \quad (a>0,\ a\neq 0)$$

$$(\log x)' = \boxed{\text{イ}\ \frac{1}{x}}$$

これらは今後の計算に利用するので覚えておくこと。

53 ［**log を含む関数の微分**］ 次の関数を微分しなさい。

(1) $y=\log(2x+3)$

解答 $y' = \{\log(2x+3)\}'$

$$= \frac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{2x+3}} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $y=\log(x^2+x+4)$

解答 $y' = \{\log(x^2+x+4)\}'$

$$= \frac{1}{x^2+x+4}\cdot(x^2+x+4)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2x+1}{x^2+x+4}} \quad \cdots \text{答}$$

(3) $y=\log_2(2x+3)$

解答 $y' = \{\log_2(2x+3)\}'$

$$= \frac{1}{(2x+3)\log 2}\cdot(2x+3)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2}{(2x+3)\log 2}} \quad \cdots \text{答}$$

(4) $y=\log_{10}(x^2+x+4)$

解答 $y' = \{\log_{10}(x^2+x+4)\}'$

$$= \frac{1}{(x^2+x+4)\log 10}\cdot(x^2+x+4)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2x+1}{(x^2+x+4)\log 10}} \quad \cdots \text{答}$$

(5) $y=x\log x - x$

解答 $y' = (x\log x - x)'$

$$= (x)'\log x + x(\log x)' - 1$$

$$= \log x + x\cdot\frac{1}{x} - 1$$

$$= \boldsymbol{\log x} \quad \cdots \text{答}$$

(6) $y=(\log x)^2$

解答 $y' = \{(\log x)^2\}'$

$$= 2\log x\cdot(\log x)'$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\log x}{x}} \quad \cdots \text{答}$$