数学３　２次曲線の tutorial　No.18

解答

9　２次曲線と面積

$\boxed{58}$ ［**楕円の面積**］ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ で囲まれた部分の面積を，次のそれぞれの方法で求めなさい。

(1) 円の面積と比較する。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，単位円 $x^2+y^2=1$ を x 軸方向に $\boxed{\text{ア}\ a}$ 倍，y 軸方向に $\boxed{\text{イ}\ b}$ 倍に拡大（縮小）した図形である。よって，その面積は単位円の $\boxed{\text{ウ}\ ab}$ 倍であり，$1^2\pi\times\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{エ}\ \pi ab}$ である。

(2) 楕円の方程式を y について解き，x で積分する。

解答 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を y について解くと，

$y=\pm b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$

よって，求める面積を S とすると，

$\dfrac{S}{2}=\displaystyle\int_{-a}^{a}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$

$\dfrac{x}{a}=t$ と置き換えると，$dx=a\,dt$ なので，

$\dfrac{S}{2}=\displaystyle\int_{-1}^{1}b\sqrt{1-t^2}\cdot a\,dt$

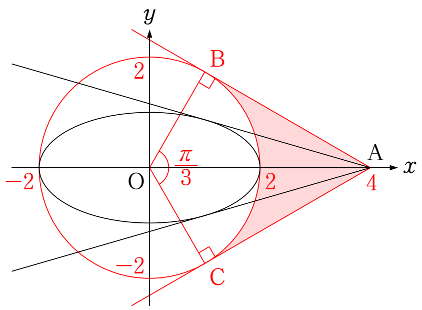
$S=2ab\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$

$\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt$ は，半径１の半円の面積を表しているので，　…… ♠

$S=2ab\times\dfrac{1^2\pi}{2}=\boldsymbol{\pi ab}$　…答

参考 ♠ も積分で計算するなら，$t=\sin\theta$ と置き換えればよい。

$\boxed{59}$ ［**楕円の面積の利用**］ 点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ から楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に接線を引くとき，楕円と２本の接線で囲まれた部分の面積を求めなさい。



解答 図全体を，x 軸を中心として y 軸方向に２倍に拡大すると，右の図のような，中心 O，半径２の円と，点 A からその円に引いた接線になる。

よって，求める面積 S は，

$S=\dfrac{1}{2}$（右の図の色のついた部分の面積）

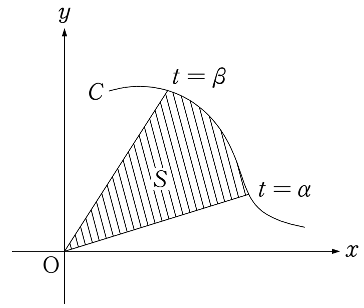
$=\dfrac{1}{2}$（四角形 ABOC − 扇形 OBC）

$=\dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{3}-\dfrac{2^2\pi}{3}\right)$

$=\boldsymbol{2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi}$　…答

$\boxed{60}$ ［**ガウス・グリーンの定理**］ $x=x(t)$，$y=y(t)$ と媒介変数表示された曲線 C がある。$\alpha\leqq t\leqq\beta$ の範囲で t が増加すると，点 $\mathrm{P}(x(t),\,y(t))$ は原点から見て反時計回りに動くとする。このとき，動径 OP が通過した部分の面積 S は次のように表せる。

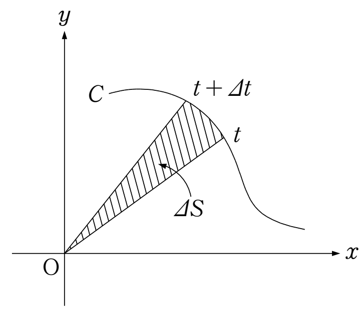
$S=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(xy'-yx')dt$



(1) この公式を証明しよう。

媒介変数が t から $t+\varDelta t$ まで変化したときの面積 S の増分を $\varDelta S$ とし，これを三角形の面積で近似すると，

$\varDelta S\fallingdotseq\boxed{\text{ア}\ \dfrac{1}{2}\left|x(t)y(t+\varDelta t)-y(t)x(t+\varDelta t)\right|}$



点 P は反時計回りに動くので，絶対値記号の中身は正だから，

$\varDelta S\fallingdotseq\boxed{\text{イ}\ \dfrac{1}{2}\{x(t)y(t+\varDelta t)-y(t)x(t+\varDelta t)\}}$

両辺を $\varDelta t$ で割ると，

$\dfrac{\varDelta S}{\varDelta t}\fallingdotseq\dfrac{1}{2}\left\{x(t)\cdot\dfrac{y(t+\varDelta t)}{\varDelta t}-y(t)\cdot\dfrac{x(t+\varDelta t)}{\varDelta t}\right\}$

$=\boxed{\text{ウ}\ \dfrac{1}{2}\left\{x(t)\cdot\dfrac{y(t+\varDelta t)-y(t)}{\varDelta t}-y(t)\cdot\dfrac{x(t+\varDelta t)-x(t)}{\varDelta t}\right\}}$

$\varDelta t\to0$ とすると，$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}(xy'-yx')$

これを t で α から β まで積分すると，

$S=\boxed{\text{エ}\ \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}(xy'-yx')dt}$

(2) この公式を使って，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

解答 この楕円を媒介変数表示すると，

$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$

$S=\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}(a\cos\theta\cdot b\cos\theta+b\sin\theta\cdot a\sin\theta)d\theta$

$=\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}ab\,d\theta$

$=\dfrac{1}{2}ab\Big[\,\theta\,\Big]_{0}^{2\pi}$

$=\boldsymbol{\pi ab}$　…答

この θ は点 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ の偏角ではないので，これを極方程式 $r=f(\theta)$ とみなすことはできない。つまり，扇形積分のつもりで $S=\displaystyle\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta$ とするのは間違っている。