数学3　2次曲線の tutorial　No.18

名前

9　2次曲線と面積

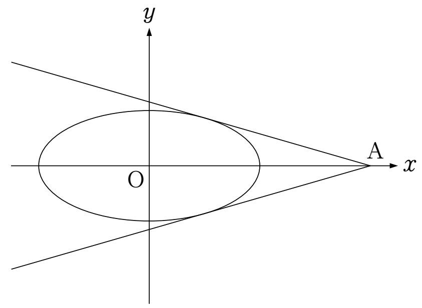
58 ［**楕円の面積**］ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で囲まれた部分の面積を，次のそれぞれの方法で求めなさい。

(1) 円の面積と比較する。

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ は，単位円 $x^2+y^2=1$ を x 軸方向に ア 倍，y 軸方向に イ 倍に拡大（縮小）した図形である。よって，その面積は単位円の ウ 倍であり，$1^2\pi\times$ ウ $=$ エ である。

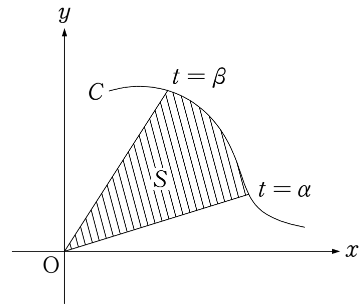
(2) 楕円の方程式を y について解き，x で積分する。

59 ［**楕円の面積の利用**］ 点 A(4, 0) から楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に接線を引くとき，楕円と 2 本の接線で囲まれた部分の面積を求めなさい。



60 ［**ガウス・グリーンの定理**］ $x=x(t)$，$y=y(t)$ と媒介変数表示された曲線 C がある。$\alpha\leqq t\leqq\beta$ の範囲で t が増加すると，点 $\mathrm{P}(x(t),\,y(t))$ は原点から見て反時計回りに動くとする。このとき，動径 OP が通過した部分の面積 S は次のように表せる。

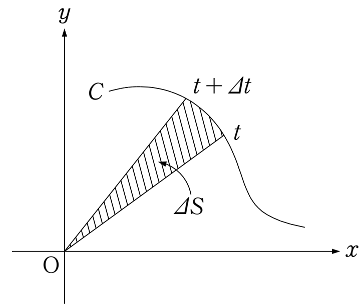
$$S=\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}(xy'-yx')dt$$



(1) この公式を証明しよう。

媒介変数が t から $t+\Delta t$ まで変化したときの面積 S の増分を ΔS とし，これを三角形の面積で近似すると，

$\Delta S\fallingdotseq$ ア



点 P は反時計回りに動くので，絶対値記号の中身は正だから，

$\Delta S\fallingdotseq$ イ

両辺を Δt で割ると，

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}\fallingdotseq\frac{1}{2}\left\{x(t)\cdot\frac{y(t+\Delta t)}{\Delta t}-y(t)\cdot\frac{x(t+\Delta t)}{\Delta t}\right\}$$

$=$ ウ

$\Delta t\to0$ とすると，$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}(xy'-yx')$

これを t で α から β まで積分すると，

$S=$ エ

(2) この公式を使って，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で囲まれた部分の面積を求めなさい。

この θ は点 $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ の偏角ではないので，これを極方程式 $r=f(\theta)$ とみなすことはできない。つまり，扇形積分のつもりで $S=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)d\theta$ とするのは間違っている。