

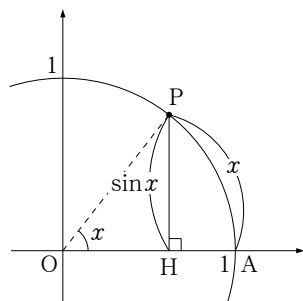
数学3 関数の極限のtutorial No.6

解答

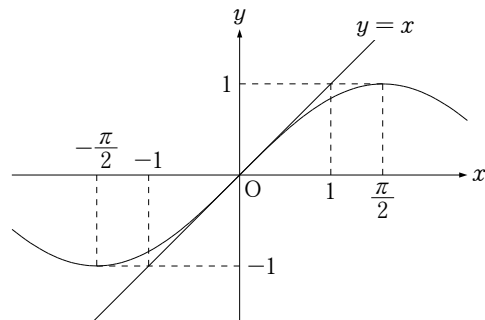
26 $\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{の極限}\right]$ 弧度法で表された三角関数について、極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ を考える。これは $\frac{0}{0}$ の不定形なので、この式のままでは極限は分からない。不定形を解消しようにも、分子が三角関数なので、約分もできない。この極限の求め方を考えよう。

(1) 次の図を利用して、極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ の結果を予想しなさい。

① 単位円



② $y = \sin x$ のグラフ



解答 円周上の点 P が点 A に近づくとき、 \widehat{PA} と線分 PH の長さがほとんど同じになるように見えるので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{PH}{\widehat{PA}} = 1$$

と予想できる。

解答 原点に十分近いところでは、 $y = \sin x$ のグラフは直線 $y = x$ ほとんど重なっているように見えるので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

と予想できる。

(2) 予想が正しいことを次のように証明した。□にあてはまる式を答えなさい。

右の図で、面積を比べると、 $\triangle OAP < \text{扇形 OAP} < \triangle OAT$

$$\triangle OAP = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$\text{扇形 OAP} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$\triangle OAT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x = \frac{\tan x}{2}$$

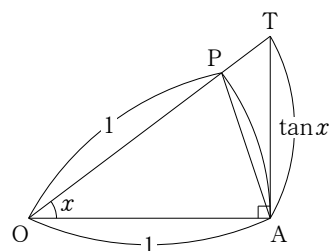
よって、 $\sin x < x < \tan x$

各辺を $\sin x (> 0)$ で割ると、 $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

各辺の逆数をとると、 $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ なので、はさみうちの原理より、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ … 終

(この後、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ も示さなければならないが省略する)



27 $\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{の極限のまとめ}\right]$ 26の結果をまとめなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ (今後利用するので覚えておくこと)

(2) x が 0 に十分近いとき、 $\sin x \doteq x$

28 $\left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \text{の極限の利用}\right]$ 次の極限值を求めなさい。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{3}$
 $= 1 \cdot \frac{1}{3}$
 $= \frac{1}{3}$ … 答

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4$
 $= 1 \cdot 4$
 $= 4$ … 答

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5}{2}$
 $= 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2}$
 $= \frac{5}{2}$ … 答

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ ($\leftarrow t = \frac{1}{x}$ とおいた)
 $= 1$ … 答

(5) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \cdot \sqrt{x}$
 $= 1 \cdot 0$
 $= 0$ … 答

(6) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x}$
 $= \infty$ … 答

《注》 $x \rightarrow 0$ の場合は、極限は存在しない。