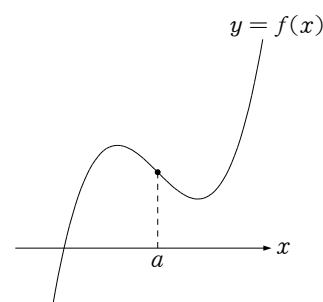


数学3 微分の応用のtutorial No.9

解答

4 第2次導関数とグラフ

33 [グラフの凹凸と変曲点] 関数 $f(x)$ は第2次導関数 $f''(x)$ をもつとする。



(1) $f''(x) > 0$ である区間では、 $f'(x)$ の値が増加するので、接線の傾きが増加する。このとき、グラフは **下に凸** である。

(2) $f''(x) < 0$ である区間では、 $f'(x)$ の値が減少するので、接線の傾きが減少する。このとき、グラフは **上に凸** である。

(3) グラフの凹凸が入れかわる境目の点を **変曲点** という。

(4) $f''(a) = 0$, かつ、 $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わるならば、 $x = a$ は $y = f(x)$ のグラフの変曲点である。

(5) 「 $x = a$ が変曲点 $\Rightarrow f''(a) = 0$ 」は成り立つが、逆は成り立たない。

34 [3次関数のグラフの凹凸・変曲点] 次の問いに答えなさい。

(1) 関数 $y = x^3 - 6x^2 + 8x + 4$ のグラフの凹凸を調べ、変曲点があれば求めなさい。

解答 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 4$ とおく。

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

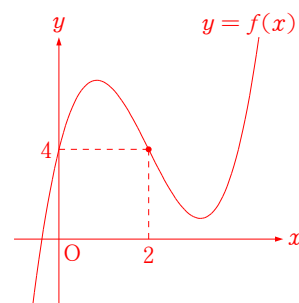
$$f''(x) = 0 \text{ とすると, } x = 2$$

曲線 $y = f(x)$ の凹凸は次の表のようになる。

x	...	2	...
f''	-	0	+
f	∩	4	∪

$x < 2$ で上に凸、 $x > 2$ で下に凸

変曲点は $(2, 4)$... 答



(2) 3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) のグラフには変曲点が存在することを証明しなさい。

解答 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく。

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(x) = 0 \text{ とすると, } x = -\frac{b}{3a}$$

$f''(x)$ は1次関数なので、 $x = -\frac{b}{3a}$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わる。

よって、 $x = -\frac{b}{3a}$ は変曲点である。 ... 答

参考 3次関数のグラフは変曲点に関して点対称である。証明するには、変曲点が原点にくるようにグラフを平行移動し、それが奇関数になっていることを示せばよい。

35 [グラフの変曲点] 次の関数のグラフの凹凸を調べ、変曲点があれば求めなさい。

(1) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)

解答 $f(x) = \sin x$ とおく。

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

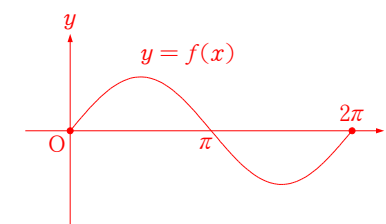
$$f''(x) = 0 \text{ とすると, } 0 \leq x \leq 2\pi \text{ の範囲で, } x = 0, \pi, 2\pi$$

曲線 $y = f(x)$ の凹凸は次の表のようになる。

x	0	...	π	...	2π
f''	0	-	0	+	0
f	0	∩	0	∪	0

$0 < x < \pi$ で上に凸、 $\pi < x < 2\pi$ で下に凸

変曲点は $(\pi, 0)$... 答



(2) $y = \log(1 + x^2)$

解答 $f(x) = \log(1 + x^2)$ とおく。

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

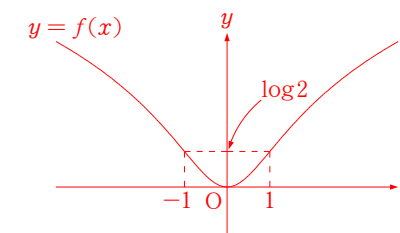
$$f''(x) = 0 \text{ とすると, } x = \pm 1$$

曲線 $y = f(x)$ の凹凸は次の表のようになる。

x	...	-1	...	1	...
f''	-	0	+	0	-
f	∩	$\log 2$	∪	$\log 2$	∩

$x < -1$, $x > 1$ で上に凸、 $-1 < x < 1$ で下に凸

変曲点は $(-1, \log 2)$, $(1, \log 2)$... 答



36 [変曲点であるための条件] $f''(a) = 0$ となる点 $x = a$ が変曲点にならないような関数 $f(x)$ の例を挙げなさい。

解答 $f''(a) = 0$ となる点 $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変わらないような例を考えればよい。

例えば、 $f''(x) = 0$ が2次方程式で重解をもつ場合を考えると、 $f(x) = x^4$ がある。

このとき、 $f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$ であるが、 $x = 0$ の前後はどちらも $f''(x) > 0$ であり、 $x = 0$ は変曲点ではない。