数学C　2次曲線の tutorial　No.10

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

7　媒介変数表示

$\boxed{34}$ ［**三角関数による媒介変数表示**］2 次曲線は媒介変数 θ と三角関数を用いて，次のように表せる。

(1)　円 $x^2+y^2=r^2$ の媒介変数表示

$x=\boxed{\text{ア}}$

$y=\boxed{\text{イ}}$

(2)　楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示

$x=\boxed{\text{ウ}}$

$y=\boxed{\text{エ}}$

θ は P の偏角であり，Q の偏角ではないことに注意。

(3)　双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示

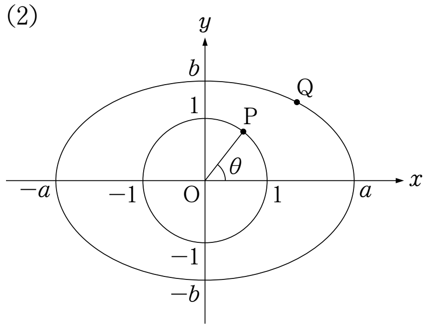
$x=\boxed{\text{オ}}$

$y=\boxed{\text{カ}}$

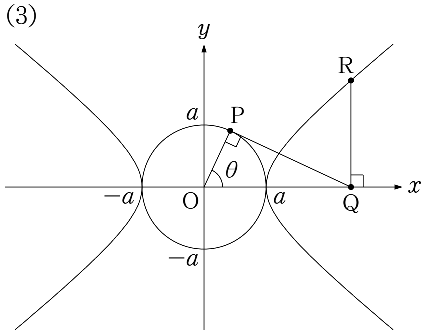
これは公式 $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に由来している。

(2), (3) に使われている媒介変数 θ を離心角とよぶことがある。

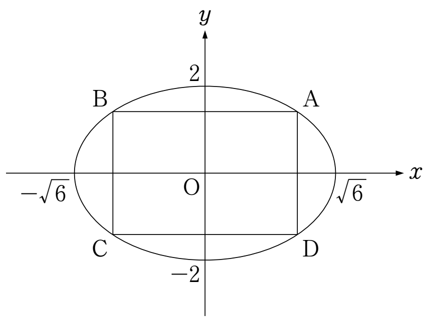
(2)



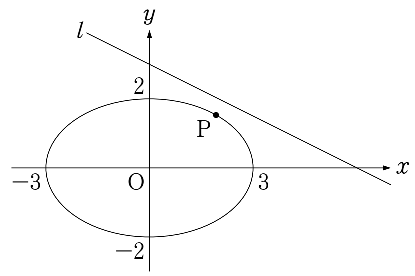
(3)



$\boxed{35}$ ［**媒介変数表示の利用**］楕円 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接し，各辺が座標軸に平行である長方形の面積の最大値を求めなさい。



$\boxed{36}$ ［**媒介変数表示の利用**］楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 P と，直線 $l: x+2y-6=0$ との距離の最小値を求めなさい。



$\boxed{37}$ ［**媒介変数表示の利用**］x, y が $2x^2+3y^2=1$ を満たす実数のとき，x^2-y^2+xy の最大値を求めなさい。

［黄チャート］

解答

7 媒介変数表示

34 ［**三角関数による媒介変数表示**］2次曲線は媒介変数 θ と三角関数を用いて，次のように表せる。

(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ の媒介変数表示

$x=$ ア $r\cos\theta$

$y=$ イ $r\sin\theta$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示

$x=$ ウ $a\cos\theta$

$y=$ エ $b\sin\theta$

θ は P の偏角であり，Q の偏角ではないことに注意。

(3) 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示

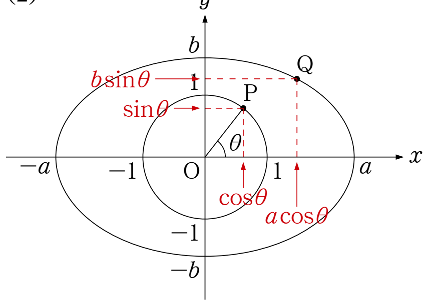
$x=$ オ $\dfrac{a}{\cos\theta}$

$y=$ カ $b\tan\theta$

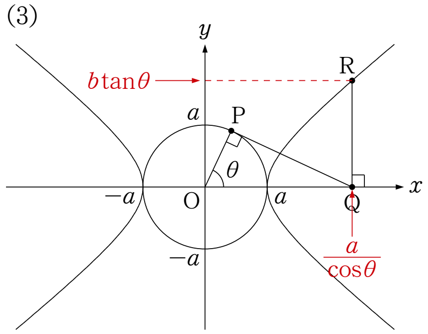
これは公式 $\tan^2\theta+1=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に由来している。

(2)，(3) に使われている媒介変数 θ を離心角とよぶことがある。

(2)



(3)



35 ［**媒介変数表示の利用**］楕円 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に内接し，各辺が座標軸に平行である長方形の面積の最大値を求めなさい。

解答 右の図のように長方形の頂点を A，B，C，D とする。

点 A の離心角を θ として，点 A の座標を，

$(\sqrt{6}\cos\theta,\ 2\sin\theta)\quad \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

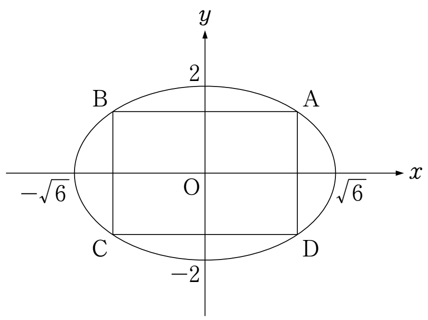
と表す。

長方形 ABCD の面積を θ の関数として $S(\theta)$ と表すと，

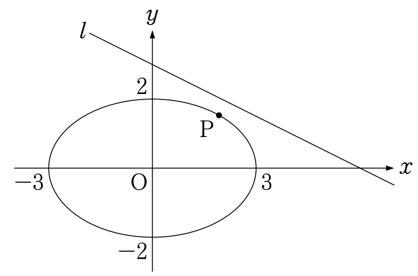
$$
\begin{aligned}
S(\theta)&=2\sqrt{6}\cos\theta\times4\sin\theta\\
&=8\sqrt{6}\sin\theta\cos\theta\\
&=4\sqrt{6}\sin2\theta \qquad \leftarrow 2\text{倍角の公式を逆に使った}
\end{aligned}
$$

$\sin2\theta$ は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大値 1 をとるので，

$S(\theta)$ の最大値は，$S\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\mathbf{4\sqrt{6}}$ …答



36 ［**媒介変数表示の利用**］楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上の点 P と，直線 $l:x+2y-6=0$ との距離の最小値を求めなさい。



解答 点 P の離心角を θ として，点 P の座標を，

$(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)\quad (0\leqq\theta<2\pi)$

と表す。

l と P との距離を θ の関数として $d(\theta)$ と表すと，

$$
\begin{aligned}
d(\theta)&=\frac{|3\cos\theta+4\sin\theta-6|}{\sqrt{1^2+2^2}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|5\left(\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta\right)-6\right|\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}|5\sin(\theta+\alpha)-6| \quad \left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{5}}\{6-5\sin(\theta+\alpha)\}
\end{aligned}
$$

$\sin(\theta+\alpha)$ は $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき最大値 1 をとるので，

$d(\theta)$ の最小値は，

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)&=\frac{1}{\sqrt{5}}(6-5\cdot1)\\
&=\mathbf{\frac{1}{\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$
…答

37 ［**媒介変数表示の利用**］x，y が $2x^2+3y^2=1$ を満たす実数のとき，x^2-y^2+xy の最大値を求めなさい。

［黄チャート］

解答 楕円 $2x^2+3y^2=1$ 上の点 $(x,\ y)$ を，

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta,\ y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

と表す。

$$
\begin{aligned}
x^2-y^2+xy&=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\\
&=\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin\theta\cos\theta\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos2\theta}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sin2\theta}{2}\\
&=\frac{\sqrt{6}}{12}\sin2\theta+\frac{5}{12}\cos2\theta+\frac{1}{12}\\
&=\frac{\sqrt{31}}{12}\sin(2\theta+\alpha)+\frac{1}{12}\quad\left(\text{ただし，}\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{31}},\ \sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{31}},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$\alpha\leqq2\theta+\alpha<4\pi+\alpha$ より，$\sin(2\theta+\alpha)=1$ となる θ は存在する。

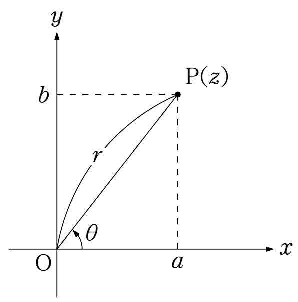
この θ の値において，x^2-y^2+xy は最大値 $\mathbf{\dfrac{\sqrt{31}+1}{12}}$ をとる。 …答

数学C　複素数平面の tutorial　No.5

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2　複素数の極形式

$\boxed{20}$ ［**極形式**］0 でない複素数 $z=a+bi$ の表す点を P とする。動径 OP の長さを r とし，実軸の正の部分を始線とする OP の一般角を θ とする。



(1)　z を r と θ で表すと，

$z=\boxed{\text{ア}}$

これを複素数 z の $\boxed{\text{イ}}$ という。

(2)　$r=\boxed{\text{ウ}}=\boxed{\text{エ}}$

(3)　角 θ を z の $\boxed{\text{オ}}$ といい，$\boxed{\text{カ}}$ で表す。arg はargument（アーギュメント）と読む。

(4)　$\cos\theta=\boxed{\text{キ}}$，$\sin\theta=\boxed{\text{ク}}$

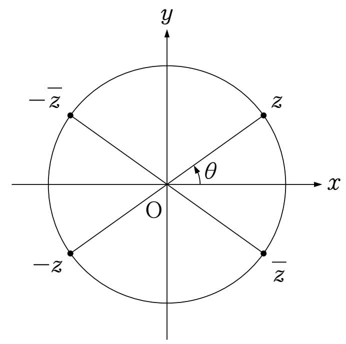
$\boxed{21}$ ［**偏角**］次の複素数の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めなさい。

(1)　$3+\sqrt{3}i$　　(2)　$-4i$

$\boxed{22}$ ［**標準形→極形式**］次の複素数を極形式で表しなさい。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$1+\sqrt{3}i$　　(2)　$5-5i$

$\boxed{23}$ ［**共役複素数の絶対値・偏角**］$|z|=r$，$\arg z=\theta$ のとき，次が成り立つ。



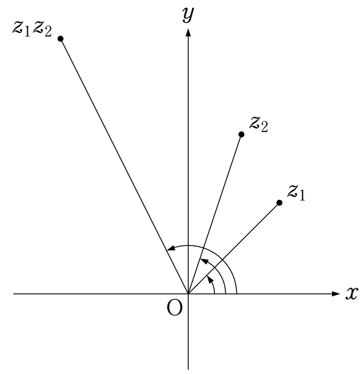
$|\overline{z}|=\boxed{\text{ア}}$　　$\arg\overline{z}=\boxed{\text{イ}}$

$|-z|=\boxed{\text{ウ}}$　　$\arg(-z)=\boxed{\text{エ}}$

$|-\overline{z}|=\boxed{\text{オ}}$　　$\arg(-\overline{z})=\boxed{\text{カ}}$

偏角についての等式は，2π の整数倍の違いは無視して一致していることを示している。（合同式の $\equiv$ と同じ）

$\boxed{24}$ ［**積・商の絶対値・偏角**］2 つの複素数 z_1，z_2 の積と商について次が成り立つ。



$|z_1|=r_1$，$\arg z_1=\theta_1$，

$|z_2|=r_2$，$\arg z_2=\theta_2$ のとき，

$|z_1z_2|=\boxed{\text{ア}}$　　$\arg z_1z_2=\boxed{\text{イ}}$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\boxed{\text{ウ}}$　　$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=\boxed{\text{エ}}$

すなわち，

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$z_1z_2=\boxed{\text{オ}}$　　…… ①

$\dfrac{z_1}{z_2}=\boxed{\text{カ}}$　　…… ②

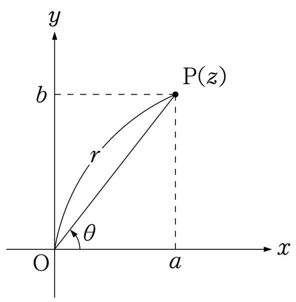
$\boxed{25}$ ［**積・商の絶対値・偏角**］$\boxed{24}$ の ①，② を証明しなさい。

数学C　複素数平面の tutorial　No.5

解答

2　複素数の極形式

20 ［**極形式**］0 でない複素数 $z=a+bi$ の表す点を P とする。動径 OP の長さを r とし，実軸の正の部分を始線とする OP の一般角を θ とする。



(1)　z を r と θ で表すと，

$z=$ ア $r(\cos\theta+i\sin\theta)$

これを複素数 z の イ 極形式 という。

(2)　$r=$ ウ $|z|$ $=$ エ $\sqrt{a^2+b^2}$

(3)　角 θ を z の オ 偏角 といい，カ $\arg z$ で表す。arg は argument（アーギュメント）と読む。

(4)　$\cos\theta=$ キ $\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=$ ク $\dfrac{b}{r}$

21 ［**偏角**］次の複素数の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めなさい。

(1)　$3+\sqrt{3}i$

解答　$z=3+\sqrt{3}i$ とすると，

$|z|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$

$\cos\theta=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{6}}$　…答

(2)　$-4i$

解答　$z=-4i$ とすると，

$|z|=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4$

$\cos\theta=\dfrac{0}{4}=0$

$\sin\theta=\dfrac{-4}{4}=-1$

よって，$\boldsymbol{\theta=\dfrac{3\pi}{4}}$　…答

22 ［**標準形→極形式**］次の複素数を極形式で表しなさい。ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(1)　$1+\sqrt{3}i$

解答　$z=1+\sqrt{3}i$ とすると，

$|z|=2$ より，

$z=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$\quad=\boldsymbol{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$　…答

(2)　$5-5i$

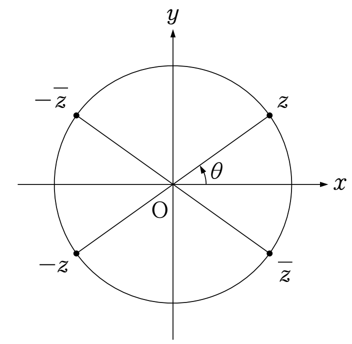
解答　$z=5-5i$ とすると，

$|z|=5\sqrt{2}$ より，

$z=5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

$\quad=\boldsymbol{5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)}$　…答

23 ［**共役複素数の絶対値・偏角**］$|z|=r$，$\arg z=\theta$ のとき，次が成り立つ。



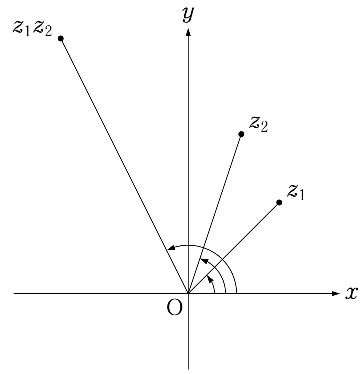
$|\overline{z}|=$ ア r　　$\arg\overline{z}=$ イ $-\theta$

$|-z|=$ ウ r　　$\arg(-z)=$ エ $\pi+\theta$

$|-\overline{z}|=$ オ r　　$\arg(-\overline{z})=$ カ $\pi-\theta$

偏角についての等式は，2π の整数倍の違いは無視して一致していることを示している。（合同式の $\equiv$ と同じ）

24 ［**積・商の絶対値・偏角**］2 つの複素数 z_1，z_2 の積と商について次が成り立つ。



$|z_1|=r_1$，$\arg z_1=\theta_1$，

$|z_2|=r_2$，$\arg z_2=\theta_2$ のとき，

$|z_1z_2|=$ ア r_1r_2　　$\arg z_1z_2=$ イ $\theta_1+\theta_2$

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=$ ウ $\dfrac{r_1}{r_2}$　　$\arg\dfrac{z_1}{z_2}=$ エ $\theta_1-\theta_2$

すなわち，

$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$z_1z_2=$ オ $r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$　…… ①

$\dfrac{z_1}{z_2}=$ カ $\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$　…… ②

25 ［**積・商の絶対値・偏角**］24 の ①，② を証明しなさい。

解答　三角関数の加法定理を使って証明する。

① $z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$\quad=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$\quad=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$　…終

② $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\cdot\dfrac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}\{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$\quad=\dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$　…終