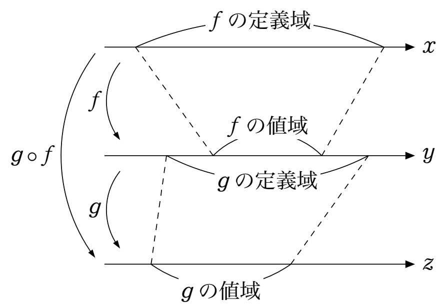
数学3　関数のtutorial　No.5

名前

5　合成関数

$\boxed{16}$ ［**合成関数の基本事項**］次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉や式を答えなさい。



(1) f の値域が g の定義域の部分集合になっている2つの関数 f，g があるとき，f の定義域内の値 x に対して，g の値域内の値 $z=$ $\boxed{\text{ア}}$ を対応させる新しい関数を考えることができる。

この関数を，f と g の $\boxed{\text{イ}}$ といい，記号 $\circ$ を用いて $\boxed{\text{ウ}}$ と表す。(先にはたらく方を右に書くことに注意)

(2) x における関数 $g \circ f$ の値を表すときは $\boxed{\text{エ}}$ と書く。すなわち，$(g \circ f)(x)=g(f(x))$ である。

$\boxed{17}$ ［**合成関数を求める**］次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g \circ f)(x)$ と $(f \circ g)(x)$ を求めなさい。

(1) $f(x)=2x+1$，$g(x)=3x+4$

(2) $f(x)=x^2+3x$，$g(x)=2x-5$

$\boxed{18}$ ［**合成に関する交換可能性**］$\boxed{17}$ については $g \circ f \neq f \circ g$ であり，一般には $\circ$ についての交換法則は成り立たないことが分かる。ただし，f，g によっては $g \circ f = f \circ g$ が成り立つ場合もある。成り立つ例をあげなさい。

$\boxed{19}$ ［**合成に関する結合法則**］結合法則 $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ は一般に成り立ち，これを単に $f \circ g \circ h$ と書くことができる。結合法則が成り立つことを証明しなさい。

$\boxed{20}$ ［**合成関数の分解**］これまでの学習の中で，与えられた関数を2つの関数の合成関数の形に分解して考えることがあった。例えばどのような場合か。

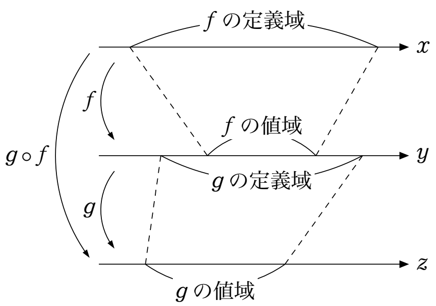
数学3 関数の tutorial No.5

解答

5 合成関数

16 ［**合成関数の基本事項**］次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉や式を答えなさい。

(1) f の値域が g の定義域の部分集合になっている2つの関数 f，g があるとき，f の定義域内の値 x に対して，g の値域内の値 $z=$ $\boxed{ア\ g(f(x))}$ を対応させる新しい関数を考えることができる。
この関数を，f と g の $\boxed{イ\ 合成関数}$ といい，記号 $\circ$ を用いて $\boxed{ウ\ g\circ f}$ と表す。（先にはたらく方を右に書くことに注意）



(2) x における関数 $g\circ f$ の値を表すときは $\boxed{エ\ (g\circ f)(x)}$ と書く。すなわち，$(g\circ f)(x)=g(f(x))$ である。

17 ［**合成関数を求める**］次の関数 $f(x)$，$g(x)$ について，合成関数 $(g\circ f)(x)$ と $(f\circ g)(x)$ を求めなさい。

(1) $f(x)=2x+1$，$g(x)=3x+4$

解答
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(2x+1)\\&=3(2x+1)+4\\&=\boldsymbol{6x+7}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(3x+4)\\&=2(3x+4)+1\\&=\boldsymbol{6x+9}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2) $f(x)=x^2+3x$，$g(x)=2x-5$

解答
$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=g(f(x))\\&=g(x^2+3x)\\&=2(x^2+3x)-5\\&=\boldsymbol{2x^2+6x-5}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(f\circ g)(x)&=f(g(x))\\&=f(2x-5)\\&=(2x-5)^2+3(2x-5)\\&=\boldsymbol{4x^2-14x+10}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

18 ［**合成に関する交換可能性**］17 については $g\circ f\neq f\circ g$ であり，一般には $\circ$ についての交換法則は成り立たないことが分かる。ただし，f，g によっては $g\circ f=f\circ g$ が成り立つ場合もある。成り立つ例をあげなさい。

解答 同一の関数 $f=g$ である場合

- $f(x)=2x+1$，$g(x)=2x+1$ のとき，$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=4x+3$

一方が恒等関数 $f(x)=x$ である場合

- $f(x)=x$，$g(x)=\sin x$ のとき，$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=\sin x$

加法・乗法の交換法則・結合法則を使う場合

- $f(x)=2x$，$g(x)=3x$ のとき，$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=6x$
- $f(x)=x+1$，$g(x)=x+2$ のとき，$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=x+3$
- $f(x)=x^2$，$g(x)=x^3$ のとき，$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=x^6$

互いに逆関数である場合

- $f(x)=2^x$，$g(x)=\log_2 x$ のとき，$(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=x$
  ただし，この例は $g\circ f$ と $f\circ g$ で定義域が異なる。

19 ［**合成に関する結合法則**］結合法則 $(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$ は一般に成り立ち，これを単に $f\circ g\circ h$ と書くことができる。結合法則が成り立つことを証明しなさい。

解答 任意の x に対して，$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ(g\circ h))(x)$ を示す。
$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=((f\circ g)\circ h)(x)\\&=(f\circ g)(h(x))\\&=f(g(h(x)))\end{aligned}\qquad\begin{aligned}(\text{右辺})&=(f\circ(g\circ h))(x)\\&=f((g\circ h)(x))\\&=f(g(h(x)))\end{aligned}$$
よって，(左辺) $=$ (右辺) $\cdots$ 終

20 ［**合成関数の分解**］これまでの学習の中で，与えられた関数を2つの関数の合成関数の形に分解して考えることがあった。例えばどのような場合か。

解答 （例）$y=\cos^2 x+\cos x$ の最大値・最小値を考えるときに，$t=\cos x$ とおいて，$y=t^2+t$ と表す。

解説 $f(x)=\cos^2 x+\cos x$ に対して，$g(x)=x^2+x$，$h(x)=\cos x$ とおくと，$f=g\circ h$ であり，これは複雑な関数 $f(x)$ を，より単純な関数 $g(x)$，$h(x)$ に分解して考えていることになる。

数学3　数列の極限の tutorial　No.8

名前

7　数列と級数の収束関係

$\boxed{34}$［**収束関係**］無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを証明しなさい。

$\boxed{35}$［**収束関係のまとめ**］$\boxed{34}$ の結果についてまとめなさい。(今後定理として利用する)

(1)　もとの命題

ア	ならば	イ

(2)　その対偶

ウ	ならば	エ

この対偶は無限級数の発散の判定によく使われる。わざわざ部分和を計算する必要がないのが便利である。

$\boxed{36}$［**収束関係の対偶の利用**］次の無限級数が発散することを証明しなさい。

(1)　$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots\cdots$

(2)　$1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots$

$\boxed{37}$［**収束関係に関する注意**］$\boxed{34}$ の命題について，その逆は成り立たない。すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない。対偶で言えば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散しても $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である場合がある。次がその例になっていることを確認しなさい。

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+\cdots\cdots$$

$\boxed{38}$［**調和級数**］$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散する例としては，調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots$ が有名である。次の式を参考にして，それを確認しなさい。

$$S_2 = 1+\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} S_4 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_8 &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} \\ &> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\ &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

数学 3　数列の極限の tutorial　No.8

解答

7　数列と級数の収束関係

34 ［**収束関係**］無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するならば，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることを証明しなさい。

解答 この無限級数の部分和を S_n とおくと，$a_n = S_n - S_{n-1}$

仮定より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するので，その和を S とすると，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$
$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})\\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \quad \leftarrow \text{各項が収束するので lim を分配できる}\\ &= S - S\\ &= 0 \quad \cdots \boxed{終}\end{aligned}$$

35 ［**収束関係のまとめ**］34 の結果についてまとめなさい。（今後定理として利用する）

(1)　もとの命題

ア $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する　ならば　イ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2)　その対偶

ウ $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$　ならば　エ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する

この対偶は無限級数の発散の判定によく使われる。わざわざ部分和を計算する必要がないのが便利である。

36 ［**収束関係の対偶の利用**］次の無限級数が発散することを証明しなさい。

(1)　$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \cdots\cdots$

解答 この無限級数の一般項は，$a_n = \frac{n}{2n-1}$ と表せる。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないので，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。　$\cdots \boxed{終}$

(2)　$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots$

解答 この無限級数の一般項は，$a_n = (-1)^{n+1}$ と表せる。

数列 $\{a_n\}$ は振動する。

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しないので，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。　$\cdots \boxed{終}$

37 ［**収束関係に関する注意**］34 の命題について，その逆は成り立たない。すなわち，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない。対偶で言えば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散しても $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である場合がある。次がその例になっていることを確認しなさい。

$$(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots\cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + \cdots\cdots$$

解答 この級数の一般項 a_n について

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}\\ \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= 0\end{aligned}$$

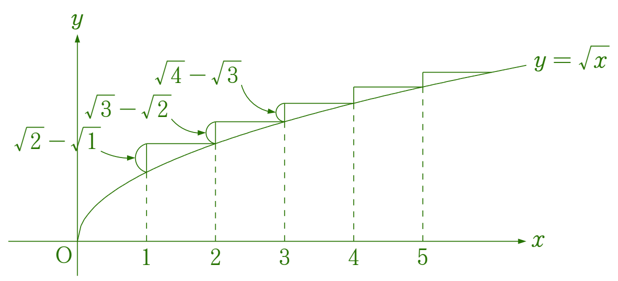
部分和 S_n について，

$$\begin{aligned}S_n &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots\cdots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\ &= \sqrt{n+1}-1\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

よって，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散する例になっている。

参考 関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフを使うと，直感的に納得することができる。



38 ［**調和級数**］$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ で $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が発散する例としては，調和級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\cdots$ が有名である。次の式を参考にして，それを確認しなさい。

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

解答 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$S_{2^k} \geqq 1 + \frac{1}{2}k$，$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2}k\right) = \infty$，追い出しの原理より，$\lim_{k\to\infty} S_{2^k} = \infty$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n$ は発散する。すなわち，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する。

数学3　関数の極限の tutorial　No.3

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{12}$［**片側からの極限**］次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉や式を答えなさい。

(1)　x が a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくことを $\boxed{\text{ア}}$ と表し，

x が a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくことを $\boxed{\text{イ}}$ と表す。

(2)　$\boxed{\text{ア}}$ のとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，

$\boxed{\text{ウ}}$ または $\boxed{\text{エ}}$ と表す。

極限が ∞ や $-\infty$ になる場合も同様に表す。

(3)　$\boxed{\text{イ}}$ のとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，

$\boxed{\text{オ}}$ または $\boxed{\text{カ}}$ と表す。

極限が ∞ や $-\infty$ になる場合も同様に表す。

(4)　$\boxed{\text{ア}}$ のときの $f(x)$ の極限を，$\boxed{\text{キ}}$ といい，

$\boxed{\text{イ}}$ のときの $f(x)$ の極限を，$\boxed{\text{ク}}$ という。

(5)　(1) において，特に $a=0$ の場合は，それぞれ $\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{コ}}$ と書く。

$\boxed{13}$［**片側極限を求める**］関数 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{|x|}$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2)　右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ と左側極限 $\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)$ を調べなさい。

$\boxed{14}$［**極限の存在条件**］次を読みなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ の両方が存在して，それらが一致するとき，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$ が存在するという。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x)$ のどちらか一方が存在しないとき，または両方が存在してもそれらが一致しないときは，$x\to a$ のときの $f(x)$ の極限は存在しない。

(3)　例えば，$x\to 0$ のときの $\dfrac{x^2+x}{|x|}$ や $\dfrac{1}{x}$ の極限は存在しない。

$\boxed{15}$［**極限の存在を判定する**］次の極限が存在するかどうか判定しなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}$

数学3　関数の極限の tutorial　No.3

解答

$\boxed{12}$ ［**片側からの極限**］ 次の $\boxed{}$ にあてはまる言葉や式を答えなさい。

(1)　x が a より大きい値をとりながら a に限りなく近づくことを ア $\boxed{x \to a+0}$ と表し，

x が a より小さい値をとりながら a に限りなく近づくことを イ $\boxed{x \to a-0}$ と表す。

(2)　$\boxed{ア}$ のとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，

ウ $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha}$ または エ $\boxed{x \to a+0 \text{ のとき } f(x) \to \alpha}$ と表す。

極限が ∞ や $-\infty$ になる場合も同様に表す。

(3)　$\boxed{イ}$ のとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，

オ $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha}$ または カ $\boxed{x \to a-0 \text{ のとき } f(x) \to \alpha}$ と表す。

極限が ∞ や $-\infty$ になる場合も同様に表す。

(4)　$\boxed{ア}$ のときの $f(x)$ の極限を，キ $\boxed{\text{右側極限}}$ といい，

$\boxed{イ}$ のときの $f(x)$ の極限を，ク $\boxed{\text{左側極限}}$ という。

(5)　(1) において，特に $a=0$ の場合は，それぞれ ケ $\boxed{x \to +0}$，コ $\boxed{x \to -0}$ と書く。

$\boxed{13}$ ［**片側極限を求める**］ 関数 $f(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|}$ について，次の問いに答えなさい。

(1)　$y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

解答　定義域は $x \neq 0$ である。

$x > 0$ と $x < 0$ に分けて考える。

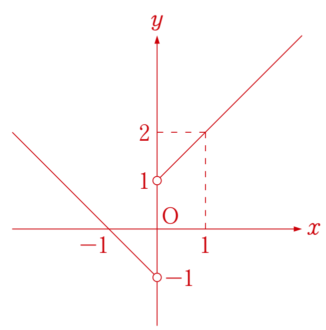
(i)　$x > 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{x} = x+1$$

(ii)　$x < 0$ のとき

$$f(x) = \frac{x^2+x}{-x} = -x-1$$

よって，グラフは右の図のようになる。　… 答



(2)　右側極限 $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$ と左側極限 $\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x)$ を調べなさい。

解答 $\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} (x+1) = 0+1 = \mathbf{1}$　… 答

$\displaystyle\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} (-x-1) = 0-1 = \mathbf{-1}$　… 答

$\boxed{14}$ ［**極限の存在条件**］ 次を読みなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x)$ の両方が存在して，それらが一致するとき，$\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ が存在するという。

(2)　$\displaystyle\lim_{x \to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x \to a-0} f(x)$ のどちらか一方が存在しないとき，または両方が存在してもそれらが一致しないときは，$x \to a$ のときの $f(x)$ の極限は存在しない。

(3)　例えば，$x \to 0$ のときの $\dfrac{x^2+x}{|x|}$ や $\dfrac{1}{x}$ の極限は存在しない。

$\boxed{15}$ ［**極限の存在を判定する**］ 次の極限が存在するかどうか判定しなさい。

(1)　$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$

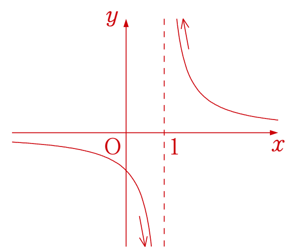
解答
$$\lim_{x \to +0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x} \quad \leftarrow x > 0 \text{ のとき } |x| = x$$
$$= \lim_{x \to +0} 1$$
$$= 1$$

$$\lim_{x \to -0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{-x}{x} \quad \leftarrow x < 0 \text{ のとき } |x| = -x$$
$$= \lim_{x \to -0} (-1)$$
$$= -1$$

左右の極限が一致しないので，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ **は存在しない。**　… 答

(2)　$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

解答　$y = \dfrac{1}{x-1}$ のグラフをかくと，



図より，

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{1}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

左右の極限が一致しないので，極限 $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ **は存在しない。**　… 答

数学3 微分の tutorial No.12

名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿

5 対数関数・指数関数の導関数

$\boxed{51}$ ［**対数関数の導関数**］ $a>0$，$a \neq 0$ として，対数関数 $\log_a x$ の導関数を考える。

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \boxed{\text{ア}} \qquad \leftarrow \text{導関数の定義より}$$

$$= \lim_{h \to 0} \boxed{\text{イ}} \qquad \leftarrow \log\text{の性質より}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \log_a \left(1+\frac{h}{x}\right) \cdots\cdots ①$$

$\dfrac{h}{x} = t$ とおくと，$h \to 0$ のとき $t \to 0$

$$① = \lim_{\boxed{\text{ウ}}} \boxed{\text{エ}} \qquad \leftarrow h\text{を消した}$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \boxed{\text{オ}} \cdots\cdots ② \qquad \leftarrow \log\text{の性質より}$$

$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は $t \to 0$ のとき，$\boxed{\text{カ}}$ （ネイピア数）に収束することが知られている。

この値を $\boxed{\text{キ}}$ で表す。すなわち，$\boxed{\text{ク}}$ と定義する。

この e を使うと，

$$② = \frac{1}{x} \log_a e$$

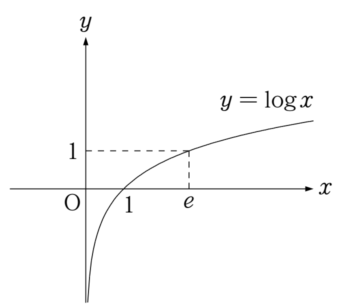
$$= \boxed{\text{ケ}} \cdots\cdots ③ \qquad \leftarrow \text{底の変換公式より}$$

e を底とする対数 $\log_e x$ を $\boxed{\text{コ}}$ といい，底の e を省略して $\log x$ と書くことが多い。

$$③ = \boxed{\text{サ}} \qquad \leftarrow \text{底の}e\text{を省略した}$$

ここまでをまとめると，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$ である。

特に，$a = e$ のときは，$\boxed{\text{シ}}$ となる。



$\boxed{52}$ ［**対数関数の導関数のまとめ**］ $\boxed{51}$ の結果をまとめなさい。

$$(\log_a x)' = \boxed{\text{ア}} \quad (a>0,\ a \neq 0)$$

$$(\log x)' = \boxed{\text{イ}}$$

これらは今後の計算に利用するので覚えておくこと。

$\boxed{53}$ ［**log を含む関数の微分**］ 次の関数を微分しなさい。

(1) $y = \log(2x+3)$

(2) $y = \log(x^2+x+4)$

(3) $y = \log_2(2x+3)$

(4) $y = \log_{10}(x^2+x+4)$

(5) $y = x\log x - x$

(6) $y = (\log x)^2$

解答

5　対数関数・指数関数の導関数

51 ［対数関数の導関数］ $a>0$，$a\neq 0$ として，対数関数 $\log_a x$ の導関数を考える。

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0} \boxed{ア\ \frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}} \quad \leftarrow \text{導関数の定義より}$$

$$= \lim_{h\to 0} \boxed{イ\ \frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}} \quad \leftarrow \text{log の性質より}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) \cdots\cdots ①$$

$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$

$$① = \lim_{\boxed{ウ\ t\to 0}} \boxed{エ\ \frac{1}{xt}\log_a(1+t)} \quad \leftarrow h\text{を消した}$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{t\to 0} \boxed{オ\ \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} \cdots\cdots ② \quad \leftarrow \text{log の性質より}$$

$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は $t\to 0$ のとき，$\boxed{カ\ 2.718281828459\cdots}$（ネイピア数）に収束することが知られている。

この値を $\boxed{キ\ e}$ で表す。すなわち，$\boxed{ク\ e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}$ と定義する。

この e を使うと，

$$② = \frac{1}{x}\log_a e$$

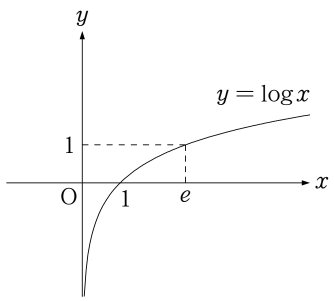
$$= \boxed{ケ\ \frac{1}{x\log_e a}} \cdots\cdots ③ \quad \leftarrow \text{底の変換公式より}$$

e を底とする対数 $\log_e x$ を $\boxed{コ\ 自然対数}$ といい，底の e を省略して $\log x$ と書くことが多い。

$$③ = \boxed{サ\ \frac{1}{x\log a}} \quad \leftarrow \text{底の}\ e\ \text{を省略した}$$

ここまでをまとめると，$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ である。

特に，$a=e$ のときは，$\boxed{シ\ (\log x)'=\frac{1}{x}}$ となる。



52 ［対数関数の導関数のまとめ］ 51 の結果をまとめなさい。

$$(\log_a x)' = \boxed{ア\ \frac{1}{x\log a}} \quad (a>0,\ a\neq 0)$$

$$(\log x)' = \boxed{イ\ \frac{1}{x}}$$

これらは今後の計算に利用するので覚えておくこと。

53 ［log を含む関数の微分］ 次の関数を微分しなさい。

(1) $y=\log(2x+3)$

解答 $y' = \{\log(2x+3)\}'$

$= \dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)'$

$= \mathbf{\dfrac{2}{2x+3}}$ …答

(2) $y=\log(x^2+x+4)$

解答 $y' = \{\log(x^2+x+4)\}'$

$= \dfrac{1}{x^2+x+4}\cdot(x^2+x+4)'$

$= \mathbf{\dfrac{2x+1}{x^2+x+4}}$ …答

(3) $y=\log_2(2x+3)$

解答 $y' = \{\log_2(2x+3)\}'$

$= \dfrac{1}{(2x+3)\log 2}\cdot(2x+3)'$

$= \mathbf{\dfrac{2}{(2x+3)\log 2}}$ …答

(4) $y=\log_{10}(x^2+x+4)$

解答 $y' = \{\log_{10}(x^2+x+4)\}'$

$= \dfrac{1}{(x^2+x+4)\log 10}\cdot(x^2+x+4)'$

$= \mathbf{\dfrac{2x+1}{(x^2+x+4)\log 10}}$ …答

(5) $y=x\log x - x$

解答 $y' = (x\log x - x)'$

$= (x)'\log x + x(\log x)' - 1$

$= \log x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1$

$= \mathbf{\log x}$ …答

(6) $y=(\log x)^2$

解答 $y' = \{(\log x)^2\}'$

$= 2\log x\cdot(\log x)'$

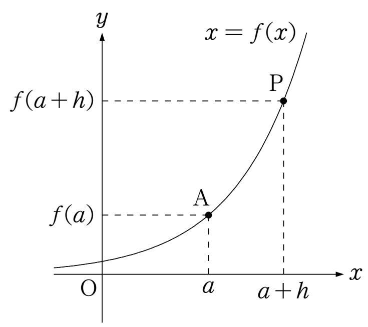
$= \mathbf{\dfrac{2\log x}{x}}$ …答

数学3 微分の応用の tutorial No.23

名前

9 関数の近似式

67 ［**1 次の近似式**］関数 $f(x)$ について，$x=a$ における関数の値 $f(a)$ と微分係数 $f'(a)$ が分かっているとき，a の値に近い x について $f(x)$ の値を求めることを考える。



(1) 関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は，

$$f'(a)=\boxed{\text{ア}}$$

つまり，h が十分 0 に近いときは，

$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と考えられる。これを $f(a+h)$ について解くと，

$$f(a+h)\fallingdotseq\boxed{\text{イ}}$$

これを $f(x)$ の $x=a$ における $\boxed{\text{ウ}}$ という。

まとめると，$\boxed{\text{エ}}$ のとき，$\boxed{\text{オ}}$ …… ①

(2) 右上の図に $f(a)+f'(a)h$ を書き込み，h の値が小さくなるほど，$f(a)+f'(a)h$ の値は $f(a+h)$ に近づいていくことを確認しなさい。

(3) ① は，$x=a+h$ とおくと，次のように表現することもできる。

$\boxed{\text{カ}}$ のとき，$\boxed{\text{キ}}$ …… ②

これは，$f(x)$ のグラフが，点 $(a,\ f(a))$ を通り，傾きが $f'(a)$ の直線に近いことをよく表している。

（例） $f(x)=x^2$ において，$x\fallingdotseq 1$ のとき，$f(x)\fallingdotseq\boxed{\text{ク}}$

(4) さらに，② で $a=0$ とすると，次の近似式が得られる。

$\boxed{\text{ケ}}$ のとき，$\boxed{\text{コ}}$ …… ③

（例） $f(x)=e^x$ において，$x\fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq\boxed{\text{サ}}$

（例） $f(x)=\sin x$ において，$x\fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq\boxed{\text{シ}}$

(5) 要するに，「関数のグラフとその接線があるとき，接点の近くではグラフと接線はほとんど一致しているので，グラフの代わりに接線を使ってもよい」と考えるのが近似のアイデアである。

68 ［**1 次の近似式**］$x\fallingdotseq e$ のとき，$\log x$ の 1 次の近似式をつくりなさい。

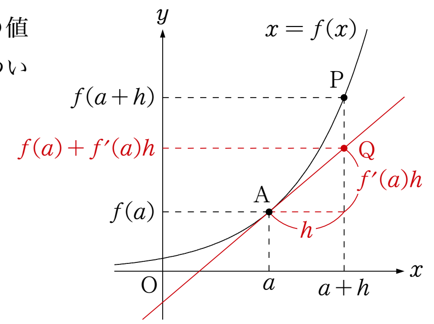
69 ［**1 次の近似式の利用**］$x\fallingdotseq 0$ のとき，近似式 $(1+x)^p\fallingdotseq 1+px$ が成り立つことを確認しなさい。また，これを利用して，1.008^{10} の近似値を求めなさい。

70 ［**1 次の近似式の利用**］$\sin 59^\circ$ の近似値を，1 次の近似式を用いて，小数第 3 位まで求めなさい。ただし，$\sqrt{3}=1.732$，$\pi=3.142$ とする。 ［黄チャート，青チャート］

解答

9　関数の近似式

67 ［1 次の近似式］関数 $f(x)$ について，$x=a$ における関数の値 $f(a)$ と微分係数 $f'(a)$ が分かっているとき，a の値に近い x について $f(x)$ の値を求めることを考える。



(1)　関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は，

$$f'(a)=\boxed{^{ア}\ \lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

つまり，h が十分 0 に近いときは，

$$f'(a)\fallingdotseq\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

と考えられる。これを $f(a+h)$ について解くと，

$$f(a+h)\fallingdotseq\boxed{^{イ}\ f(a)+f'(a)h}$$

これを $f(x)$ の $x=a$ における $\boxed{^{ウ}\ \text{1 次の近似式}}$ という。

まとめると，$\boxed{^{エ}\ h\fallingdotseq0}$ のとき，$\boxed{^{オ}\ f(a+h)\fallingdotseq f(a)+f'(a)h}$ …… ①

(2)　右上の図に $f(a)+f'(a)h$ を書き込み，h の値が小さくなるほど，$f(a)+f'(a)h$ の値は $f(a+h)$ に近づいていくことを確認しなさい。

(3)　① は，$x=a+h$ とおくと，次のように表現することもできる。

$\boxed{^{カ}\ x\fallingdotseq a}$ のとき，$\boxed{^{キ}\ f(x)\fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)}$ …… ②

これは，$f(x)$ のグラフが，点 $(a,\ f(a))$ を通り，傾きが $f'(a)$ の直線に近いことをよく表している。

（例）$f(x)=x^2$ において，$x\fallingdotseq1$ のとき，$f(x)\fallingdotseq\boxed{^{ク}\ 2x-1}$

(4)　さらに，② で $a=0$ とすると，次の近似式が得られる。

$\boxed{^{ケ}\ x\fallingdotseq0}$ のとき，$\boxed{^{コ}\ f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x}$ …… ③

（例）$f(x)=e^x$ において，$x\fallingdotseq0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq\boxed{^{サ}\ 1+x}$

（例）$f(x)=\sin x$ において，$x\fallingdotseq0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq\boxed{^{シ}\ x}$

(5)　要するに，「関数のグラフとその接線があるとき，接点の近くではグラフと接線はほとんど一致しているので，グラフの代わりに接線を使ってもよい」と考えるのが近似のアイデアである。

68 ［1 次の近似式］$x\fallingdotseq e$ のとき，$\log x$ の 1 次の近似式をつくりなさい。

解答　$f(x)=\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$f(e)=1$，$f'(e)=\dfrac{1}{e}$

$x\fallingdotseq e$ のとき，$f(x)\fallingdotseq f(e)+f'(e)(x-e)$ なので，　←② を利用した

$\log x\fallingdotseq1+\dfrac{1}{e}(x-e)=\boldsymbol{\dfrac{x}{e}}$　… 答

69 ［1 次の近似式の利用］$x\fallingdotseq0$ のとき，近似式 $(1+x)^p\fallingdotseq1+px$ が成り立つことを確認しなさい。また，これを利用して，1.008^{10} の近似値を求めなさい。

解答　$f(x)=(1+x)^p$ とおくと，$f'(x)=p(1+x)^{p-1}$

$f(0)=1$，$f'(0)=p$

$x\fallingdotseq0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ なので，　←③ を利用した

$(1+x)^p\fallingdotseq1+px$　… 終

ここで，$p=10$，$x=0.008$ とすると，

$1.008^{10}=(1+0.008)^{10}\fallingdotseq1+10\cdot0.008=\mathbf{1.08}$　… 答

参考　1.008^{10} の真の値は 1.082942308472839 である。

70 ［1 次の近似式の利用］$\sin59^\circ$ の近似値を，1 次の近似式を用いて，小数第 3 位まで求めなさい。ただし，$\sqrt{3}=1.732$，$\pi=3.142$ とする。　［黄チャート，青チャート］

解答　$\sin59^\circ=\sin(60^\circ-1^\circ)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{180}\right)$

$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ とおくと，$f'(x)=-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$

$f(0)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

$x\fallingdotseq0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq f(0)+f'(0)x$ なので，　←③ を利用した

$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\fallingdotseq\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}x$

ここで，$x=\dfrac{\pi}{180}$ とすると，

$\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{180}\right)\fallingdotseq\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{180}\fallingdotseq\dfrac{1.732}{2}-\dfrac{3.142}{360}=0.8572\cdots\cdots\fallingdotseq\mathbf{0.857}$

参考　$\sin59^\circ$ の真の値は 0.8571673007…… である。

数学 3　積分の tutorial　No.7

名前

$\boxed{28}$ ［**部分積分法**］ 積の微分法を逆向きに使うような積分法を作りたい。

(1)　まず積の微分法を確認する。微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，その積 $f(x)g(x)$ を x で微分すると，$\{f(x)g(x)\}' =$ $\boxed{}^{ア}$ となる。

(2)　(1) の式を $f(x)g'(x)$ について解くと，

$\boxed{}^{イ}$

両辺を x で積分すると，

$\boxed{}^{ウ}$ …… ①

これを公式として今後利用する。

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

(3)　さらに，① の g' を g に，g を G に置き直すと，(G は g の原始関数)

$\boxed{}^{エ}$

左辺の被積分関数が $f(x)g(x)$ となり，この公式が "積の積分法" のようにはたらくことが分かる。

覚え方

この公式は右辺にも $\int$ があるので，左辺の積分が完了するわけではなく，別の積分に移し替えているだけである。つまり，積分法として利用するときは，右辺の積分の方が易しくなっていないと意味がない。そのためには積の関数のどちらを微分，どちらを積分にするのかうまく選ぶ必要がある。

$\boxed{29}$ ［**部分積分法 (n 次関数 × 三角関数)**］ 不定積分 $\int (2x+3)\cos x\,dx$ を求めなさい。

$\boxed{30}$ ［**部分積分法 (n 次関数 × 指数関数)**］ 不定積分 $\int (2x+1)e^{-x}dx$ を求めなさい。　［黄チャート］

$\boxed{31}$ ［**部分積分法 (2 回利用)**］ 不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を求めなさい。　［黄チャート］

$\boxed{32}$ ［**部分積分法 (n 次関数 × 対数関数)**］ 次の不定積分を求めなさい。

(1)　$\int x\log x\,dx$

(2)　$\int \log x\,dx$

$\int \log x\,dx = x\log x - x + C$ はよく出るので，結果を覚えておいてもよい。

数学 3　積分の tutorial　No.7

解答

28 ［**部分積分法**］ 積の微分法を逆向きに使うような積分法を作りたい。

(1)　まず積の微分法を確認する。微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ について，その積 $f(x)g(x)$ を x で微分すると，$\{f(x)g(x)\}' =$ ア $\boxed{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}$ となる。

(2)　(1) の式を $f(x)g'(x)$ について解くと，

イ $\boxed{f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x)}$

両辺を x で積分すると，

ウ $\boxed{\displaystyle\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx}$ …… ①

これを公式として今後利用する。

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

(3)　さらに，① の g' を g に，g を G に置き直すと，(G は g の原始関数)

エ $\boxed{\displaystyle\int f(x)g(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx}$

左辺の被積分関数が $f(x)g(x)$ となり，この公式が "積の積分法" のようにはたらくことが分かる。

覚え方

ビブン
そのまま

$$\int f(x)g(x)dx=f(x)G(x)-\int f'(x)G(x)dx$$

セキブン
セキブン

ビブンは一方だけ
セキブンは両方

この公式は右辺にも $\int$ があるので，左辺の積分が完了するわけではなく，別の積分に移し替えているだけである。つまり，積分法として利用するときは，右辺の積分の方が易しくなっていないと意味がない。そのためには積の関数のどちらを微分，どちらを積分にするのかうまく選ぶ必要がある。

29 ［**部分積分法 (n 次関数 × 三角関数)**］ 不定積分 $\int(2x+3)\cos x\,dx$ を求めなさい。

解答　$\displaystyle\int(2x+3)\cos x\,dx$　　← $2x+3$ を微分側，$\cos x$ を積分側にする。

$\displaystyle=(2x+3)\sin x-\int 2\sin x\,dx$

$=\boldsymbol{(2x+3)\sin x+2\cos x+C}$ … 答

30 ［**部分積分法 (n 次関数 × 指数関数)**］ 不定積分 $\int(2x+1)e^{-x}dx$ を求めなさい。　［黄チャート］

解答　$\displaystyle\int(2x+1)e^{-x}dx$　　← $2x+1$ を微分側，e^{-x} を積分側にする。

$\displaystyle=(2x+1)(-e^{-x})-\int 2(-e^{-x})\,dx$

$\displaystyle=-(2x+1)e^{-x}+2\int e^{-x}dx$

$=-(2x+1)e^{-x}-2e^{-x}+C$

$=\boldsymbol{-(2x+3)e^{-x}+C}$ … 答

31 ［**部分積分法 (2 回利用)**］ 不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を求めなさい。　［黄チャート］

解答　$\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$　　← x^2 を微分側，$\cos x$ を積分側にする。

$\displaystyle=x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx$　　← $2x$ を微分側，$\sin x$ を積分側にする。

$\displaystyle=x^2\sin x-\left\{2x(-\cos x)-\int 2(-\cos x)\,dx\right\}$

$\displaystyle=x^2\sin x+2x\cos x-2\int\cos x\,dx$

$=\boldsymbol{x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C}$ … 答

32 ［**部分積分法 (n 次関数 × 対数関数)**］ 次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int x\log x\,dx$　　← x を積分側，$\log x$ を微分側にする。

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x^2\log x-\int\frac{1}{2}x\,dx$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2}x^2\log x-\frac{1}{4}x^2+C}$ … 答

(2) $\displaystyle\int\log x\,dx$

$\displaystyle=\int 1\cdot\log x\,dx$　　← 1 を積分側，$\log x$ を微分側にする。

$\displaystyle=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle=x\log x-\int dx$

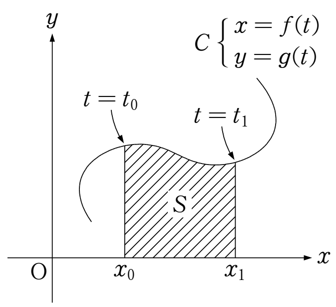
$=\boldsymbol{x\log x-x+C}$ … 答

$\int\log x\,dx=x\log x-x+C$ はよく出るので，結果を覚えておいてもよい。

数学3 積分の応用の tutorial No.3

名前

$\boxed{9}$ ［パラメータ曲線と面積］ 媒介変数 t によって $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線 C がある。



$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，$f(t)$ は単調に増加し，
$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，常に $g(t) \geqq 0$ とする。
$f(t_0)=x_0$，$f(t_1)=x_1$ とすると，$f(t)$ は単調増加なので，$x_0 \leqq x_1$
このとき，曲線 C と x 軸，2 直線 $x=x_0$，$x=x_1$ で囲まれた部分の面積 S は，

$S=$ $\boxed{ア\quad\quad\quad}$

x を t に置換すると，$dx=f'(t)dt$ であり，積分区間の対応は

x	$x_0 \to x_1$
t	$t_0 \to t_1$

なので，

$S=$ $\boxed{イ\quad\quad\quad}$

$f(t)$ が単調に減少するときは $x_0 \geqq x_1$ となり，上の公式のままでは S が負になる。この場合，積分区間の上端と下端を逆にすることで対処すればよい。$f(t)$ が単調でないときは，単調な区間に切って考える。

$\boxed{10}$ ［パラメータ曲線と面積］ 媒介変数 t を用いて $x=2t$，$y=t^2$ で表される曲線 C がある。曲線 C，x 軸，2 直線 $x=2$，$x=4$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

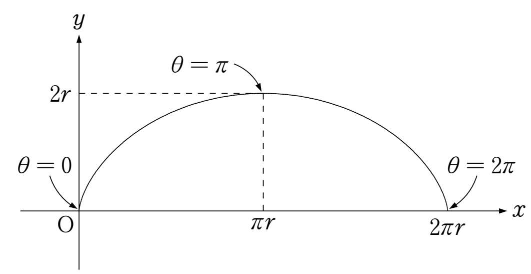
$\boxed{11}$ ［パラメータ曲線と面積］ 媒介変数 t を用いて $x=\cos t$，$y=\sin t$ で表される曲線 C がある。曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

$\boxed{12}$ ［パラメータ曲線と面積］ $a>0$ とする。

サイクロイド $\begin{cases} x=r(t-\sin t) \\ y=r(1-\cos t) \end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

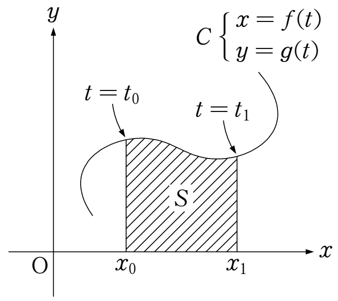
［啓林館］



数学 3　積分の応用の tutorial　No.3

解答

9 ［パラメータ曲線と面積］ 媒介変数 t によって $x=f(t)$，$y=g(t)$ と表される曲線 C がある。



$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，$f(t)$ は単調に増加し，

$t_0 \leqq t \leqq t_1$ の範囲で，常に $g(t) \geqq 0$ とする。

$f(t_0)=x_0$，$f(t_1)=x_1$ とすると，$f(t)$ は単調増加なので，$x_0 \leqq x_1$

このとき，曲線 C と x 軸，2 直線 $x=x_0$，$x=x_1$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\boxed{^{ア}\ \int_{x_0}^{x_1} y\,dx}$$

x を t に置換すると，$dx=f'(t)dt$ であり，積分区間の対応は

x	$x_0 \to x_1$
t	$t_0 \to t_1$

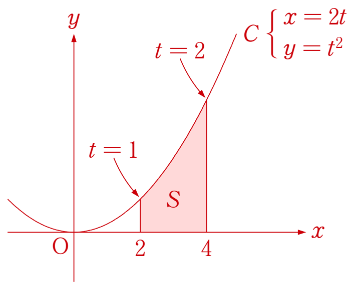
なので，

$$S=\boxed{^{イ}\ \int_{t_0}^{t_1} g(t)f'(t)dt}$$

$f(t)$ が単調に減少するときは $x_0 \geqq x_1$ となり，上の公式のままでは S が負になる。この場合，積分区間の上端と下端を逆にすることで対処すればよい。$f(t)$ が単調でないときは，単調な区間に切って考える。

10 ［パラメータ曲線と面積］ 媒介変数 t を用いて $x=2t$，$y=t^2$ で表される曲線 C がある。曲線 C，x 軸，2 直線 $x=2$，$x=4$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

解答　右の図より，



$$S=\int_2^4 y\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

$x=2t$ より，$dx=2dt$

積分区間の対応は，

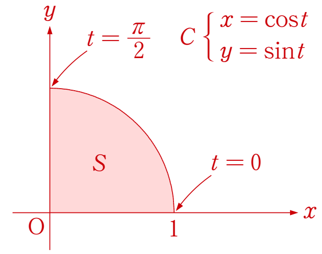
x	$2 \to 4$
t	$1 \to 2$

これらを ① に適用すると，

$$\begin{aligned}S&=\int_1^2 t^2\cdot 2dt\\&=2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^2\\&=2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{14}{3}}\quad\cdots 答\end{aligned}$$

11 ［パラメータ曲線と面積］ 媒介変数 t を用いて $x=\cos t$，$y=\sin t$ で表される曲線 C がある。曲線 C の $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の部分と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

解答　右の図より，



$$S=\int_0^1 y\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

$x=\cos t$ より，$dx=-\sin t\,dt$

積分区間の対応は，

x	$0 \to 1$
t	$\frac{\pi}{2} \to 0$

これらを ① に適用すると，

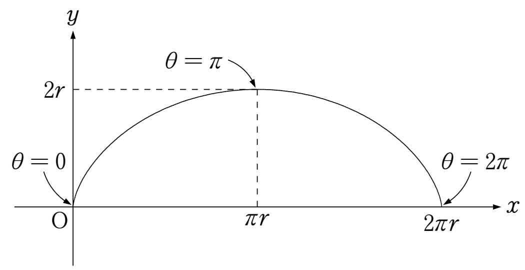
$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin t\cdot(-\sin t\,dt)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt\\&=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\quad\cdots 答\end{aligned}$$

12 ［パラメータ曲線と面積］ $a>0$ とする。

サイクロイド $\begin{cases}x=r(t-\sin t)\\y=r(1-\cos t)\end{cases}$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$

と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

［啓林館］



解答　右の図より，

$$S=\int_0^{2\pi r} y\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

$x=r(t-\sin t)$ より，$dx=r(1-\cos t)dt$

積分区間の対応は，

x	$0 \to 2\pi r$
t	$0 \to 2\pi$

これらを ① に適用すると，

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi} r(1-\cos t)\cdot r(1-\cos t)\,dt\\&=r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt\\&=r^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt\\&=r^2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}\right)dt\qquad \leftarrow \int_0^{2\pi}\cos t\,dt=0,\ \int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt=0\ より\\&=r^2\left[\frac{3}{2}t\right]_0^{2\pi}=\boldsymbol{3\pi r^2}\quad\cdots 答\end{aligned}$$