

3 三角比の相互関係

13 〔三角比の相互関係〕

(1) $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, $(\tan\theta)^2$ のことを, それぞれ次のように表記することが認められている。

$(\sin\theta)^2 =$

ア

$(\cos\theta)^2 =$

イ

$(\tan\theta)^2 =$

ウ

(2) $\sin$, $\cos$, $\tan$ の間に次の関係が成り立つ。

三角比の相互関係の公式

① $\tan\theta = \frac{\div}{\div}$

②

カ

 +

キ

 = 1

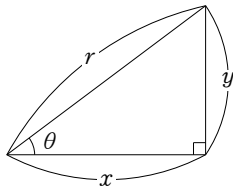
③

ク

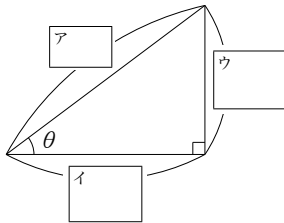
 + 1 = $\frac{\div}{\div}$

14 〔三角比の相互関係〕 13 の公式を証明しなさい。

① $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の証明



② $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の証明



③ $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ の証明

15 〔三角比の相互関係〕 θ は鋭角とする。次の値を求めなさい。

(1) $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos\theta$ の値

(2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{4}$ のとき, $\sin\theta$ の値

(3) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $\tan\theta$ の値

(4) $\tan\theta = \sqrt{5}$ のとき, $\cos\theta$ の値

(5) $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\tan\theta$ の値

(6) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, $\sin\theta$ の値

3

 三角比の相互関係

13

 [三角比の相互関係]

(1) $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$, $(\tan\theta)^2$ のことを, それぞれ次のように表記することが認められている。

$(\sin\theta)^2 = \boxed{\text{ア} \sin^2\theta} \qquad (\cos\theta)^2 = \boxed{\text{イ} \cos^2\theta} \qquad (\tan\theta)^2 = \boxed{\text{ウ} \tan^2\theta}$

(2) $\sin$, $\cos$, $\tan$ の間に次の関係が成り立つ。

三角比の相互関係の公式

① $\tan\theta = \frac{\boxed{\text{エ} \sin\theta}}{\boxed{\text{オ} \cos\theta}}$

 ② $\boxed{\text{カ} \sin^2\theta} + \boxed{\text{キ} \cos^2\theta} = 1$

 ③ $\boxed{\text{ク} \tan^2\theta} + 1 = \frac{\boxed{\text{ケ} 1}}{\boxed{\text{コ} \cos^2\theta}}$

14

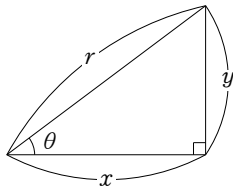
 [三角比の相互関係]

 13

 の公式を証明しなさい。

① $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ の証明

[解答] (右辺) $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x} = \tan\theta =$ (左辺) $\cdots$ [終]

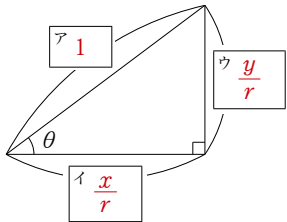


② $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の証明

[解答] 3 辺を r で割った相似形を考える。

三平方の定理より,

$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1^2$
 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \cdots$ [終]



③ $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ の証明

[解答] (左辺) $= \tan^2\theta + 1 = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} =$ (右辺) $\cdots$ [終]

15

 [三角比の相互関係] θ は鋭角とする。次の値を求めなさい。

(1) $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos\theta$ の値

[解答] $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より,
 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$
 $\cos^2\theta = \frac{8}{9}$
 $\cos\theta > 0$ なので,
 $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \cdots$ [答]

(2) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{4}$ のとき, $\sin\theta$ の値

[解答] $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より,
 $\sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)^2 = 1$
 $\sin^2\theta = \frac{11}{16}$
 $\sin\theta > 0$ なので,
 $\sin\theta = \frac{\sqrt{11}}{4} \quad \cdots$ [答]

(3) $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $\tan\theta$ の値

[解答] $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より,
 $\tan^2\theta + 1 = 1 \div \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$
 $\tan^2\theta = 2$
 $\tan\theta > 0$ なので,
 $\tan\theta = \sqrt{2} \quad \cdots$ [答]

(4) $\tan\theta = \sqrt{5}$ のとき, $\cos\theta$ の値

[解答] $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より,
 $(\sqrt{5})^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$
 $\cos^2\theta = \frac{1}{6}$
 $\cos\theta > 0$ なので,
 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \cdots$ [答]

(5) $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\tan\theta$ の値

[解答] $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より,
 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$
 $\cos^2\theta = \frac{8}{9}$
 $\cos\theta > 0$ なので,
 $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
 $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \cdots$ [答]

(6) $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき, $\sin\theta$ の値

[解答] $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より,
 $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta$
 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すると,
 $\sin^2\theta + (\sqrt{2}\sin\theta)^2 = 1$
 $\sin^2\theta = \frac{1}{3}$
 $\sin\theta > 0$ なので,
 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \cdots$ [答]

8 補角の公式

34 [補角の公式] 次の にあてはまるものを答えなさい。

(1) 2つの角 α , β が $\alpha + \beta = 180^\circ$ を満たすとき、一方を他方の という。

(2) θ の補角は、 と表せる。

(3) 補角の三角比について次の関係が成り立つ。

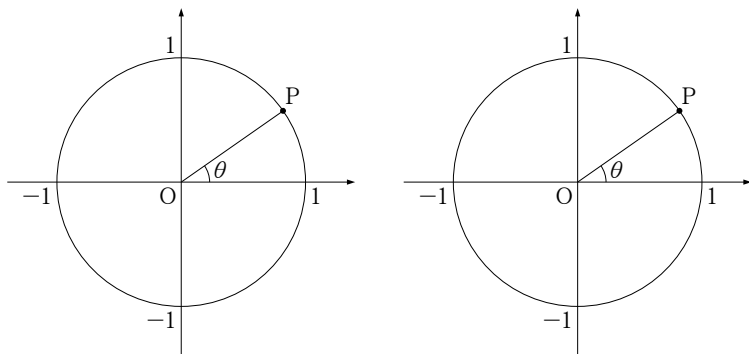
補角の公式 ①

$\alpha + \beta = 180^\circ$ のとき、 $\sin \alpha =$ $\cos \alpha =$ $\tan \alpha =$

補角の公式 ②

$\sin(180^\circ - \theta) =$ $\cos(180^\circ - \theta) =$ $\tan(180^\circ - \theta) =$

(4) 右の図を使って、補角の公式 ② を確認しなさい。



35 [90° 以下で表す] 補角の公式を使って、次の三角比の値を鋭角の三角比で表しなさい。

- (1) $\sin 158^\circ$ (2) $\cos 115^\circ$ (3) $\tan 142^\circ$

36 [45° 以下で表す] 余角・補角の公式を使って、次の三角比の値を 45° 以下の角の三角比で表しなさい。

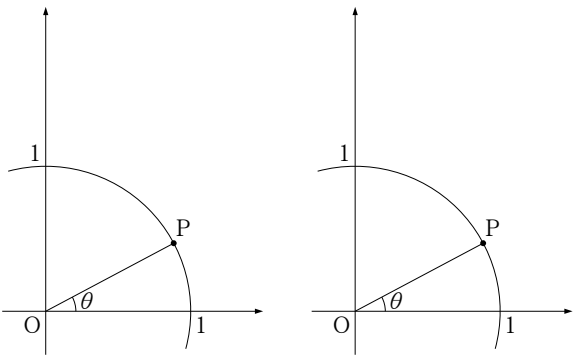
- (1) $\sin 110^\circ$ (2) $\cos 130^\circ$ (3) $\tan 108^\circ$

37 [余角の公式] 余角の公式を、単位円の図で確認しなさい。

$\sin(90^\circ - \theta) =$

$\cos(90^\circ - \theta) =$

$\tan(90^\circ - \theta) =$

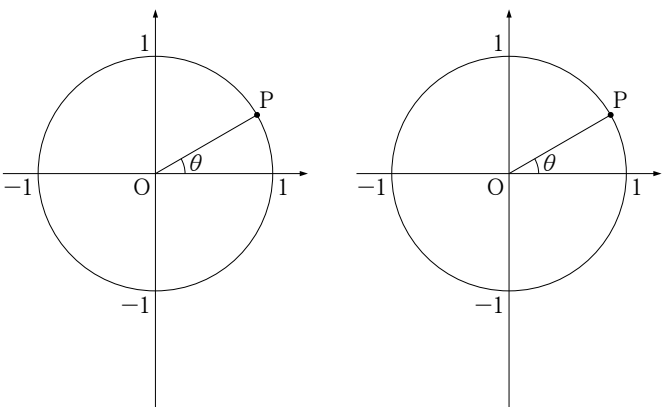


38 [$\theta + 90^\circ$ の三角比] 右の図を利用して、次の公式*3を完成させなさい。

$\sin(\theta + 90^\circ) =$

$\cos(\theta + 90^\circ) =$

$\tan(\theta + 90^\circ) =$



39 [$\theta + 90^\circ$ の三角比] 38 の公式は、余角の公式と補角の公式を組み合わせて作ることもできる。

補角の公式 余角の公式

$\sin(\theta + 90^\circ) =$ $=$

$\cos(\theta + 90^\circ) =$ $=$

$\tan(\theta + 90^\circ) =$ $=$

*3 この公式は覚えなくてもよいが、必要な時は自分で作れるようにしておくこと。

数学1 三角比のtutorial No.11

8 補角の公式

34 [補角の公式] 次の□にあてはまるものを答えなさい。

(1) 2つの角 α , β が $\alpha + \beta = 180^\circ$ を満たすとき、一方を他方の^ア **補角** という。

(2) θ の補角は、^イ **$180^\circ - \theta$** と表せる。

(3) 補角の三角比について次の関係が成り立つ。

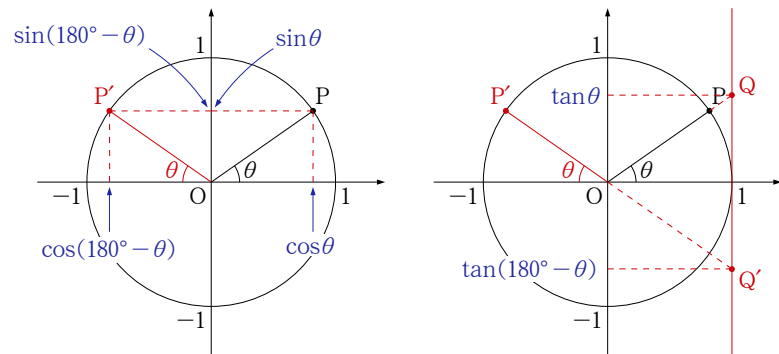
補角の公式①

$\alpha + \beta = 180^\circ$ のとき、 $\sin \alpha =$ ^ウ **$\sin \beta$** $\cos \alpha =$ ^エ **$-\cos \beta$** $\tan \alpha =$ ^オ **$-\tan \beta$**

補角の公式②

$\sin(180^\circ - \theta) =$ ^カ **$\sin \theta$** $\cos(180^\circ - \theta) =$ ^キ **$-\cos \theta$** $\tan(180^\circ - \theta) =$ ^ク **$-\tan \theta$**

(4) 右の図を使って、補角の公式②を確認しなさい。



35 [90°以下で表す] 補角の公式を使って、次の三角比の値を鋭角の三角比で表しなさい。

- (1) $\sin 158^\circ =$ **$\sin 22^\circ$** ... **答** (2) $\cos 115^\circ =$ **$-\cos 65^\circ$** ... **答** (3) $\tan 142^\circ =$ **$-\tan 38^\circ$** ... **答**

36 [45°以下で表す] 余角・補角の公式を使って、次の三角比の値を45°以下の角の三角比で表しなさい。

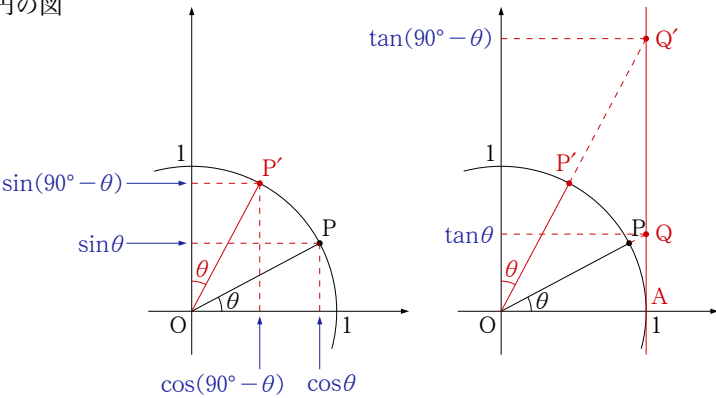
- (1) $\sin 110^\circ =$ **$\sin 70^\circ$**
 $=$ **$\cos 20^\circ$** ... **答** (2) $\cos 130^\circ =$ **$-\cos 50^\circ$**
 $=$ **$-\sin 40^\circ$** ... **答** (3) $\tan 108^\circ =$ **$-\tan 72^\circ$**
 $=$ **$-\frac{1}{\tan 18^\circ}$** ... **答**

解答

37 [余角の公式] 余角の公式を、単位円の図で確認しなさい。

$\sin(90^\circ - \theta) =$ ^ア **$\cos \theta$**
 $\cos(90^\circ - \theta) =$ ^イ **$\sin \theta$**
 $\tan(90^\circ - \theta) =$ ^ウ **$\frac{1}{\tan \theta}$**

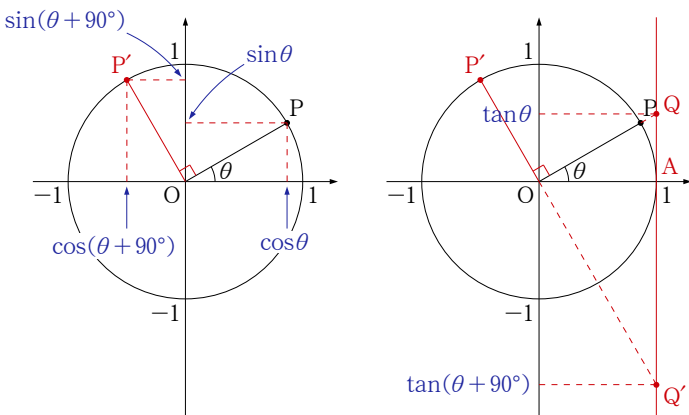
解説 tan については、
 $\triangle QAO \sim \triangle OAQ'$ から、
 $QA : AO = OA : AQ'$
 $QA \cdot AQ' = OA^2 = 1$



38 [$\theta + 90^\circ$ の三角比] 右の図を利用して、次の公式*3を完成させなさい。

$\sin(\theta + 90^\circ) =$ ^ア **$\cos \theta$**
 $\cos(\theta + 90^\circ) =$ ^イ **$-\sin \theta$**
 $\tan(\theta + 90^\circ) =$ ^ウ **$-\frac{1}{\tan \theta}$**

解説 tan については、
 $\triangle QAO \sim \triangle OAQ'$ から、
 $QA : AO = OA : AQ'$
 $QA \cdot AQ' = OA^2 = 1$



39 [$\theta + 90^\circ$ の三角比] 38の公式は、余角の公式と補角の公式を組み合わせで作ることできる。

補角の公式 余角の公式

$\sin(\theta + 90^\circ) =$ ^ア **$\sin(90^\circ - \theta)$** $=$ ^イ **$\cos \theta$**
 $\cos(\theta + 90^\circ) =$ ^ウ **$-\cos(90^\circ - \theta)$** $=$ ^エ **$-\sin \theta$**
 $\tan(\theta + 90^\circ) =$ ^オ **$-\tan(90^\circ - \theta)$** $=$ ^カ **$-\frac{1}{\tan \theta}$**

*3 この公式は覚えなくてもよいが、必要な時は自分で作れるようにしておくこと。

8 データの相関

これまでは1つの変量について考えてきたが、ここでは身長と体重、数学の成績と英語の成績、睡眠時間と体力テストの得点など、2つの変量の関係について考える。

33 [相関の正負] 右のデータは、10人の生徒に行った試験の数学の得点 x と英語の得点 y である。右下の図は、各生徒の得点の組 (x, y) を点として座標平面に表したものである。

(1) このように、2つの変量からなるデータを平面上の点として図示したものを という。

(2) この図から、2つの変量 x, y の関係について、どのようなことが分かるか。

(3) 一般に、一方が増加すると他方も増加する傾向があるとき、2つの変量の間には

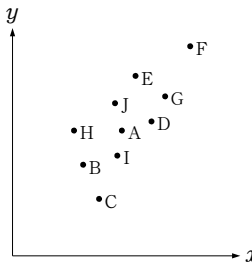
があるという。また、一方が増加すると他方が減少する傾向があるときは

があるといい、どちらの傾向もみられないときは

という。

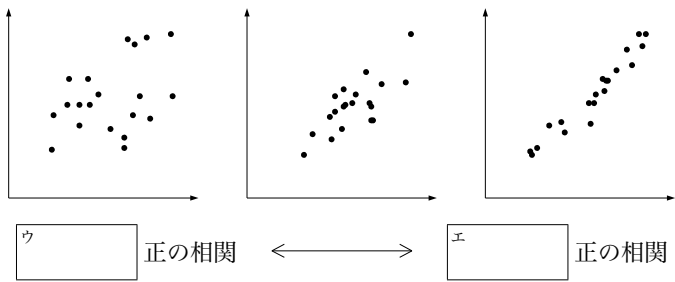
34 [相関の正負] 右のデータは、8人の高校生の50m走の記録 x 秒と立ち幅とびの記録 y cmである。このデータを散布図に表し、 x と y の相関関係を調べなさい。

生徒	x	y
A	48	55
B	31	40
C	38	25
D	61	59
E	54	79
F	78	92
G	67	70
H	27	55
I	46	44
J	45	67



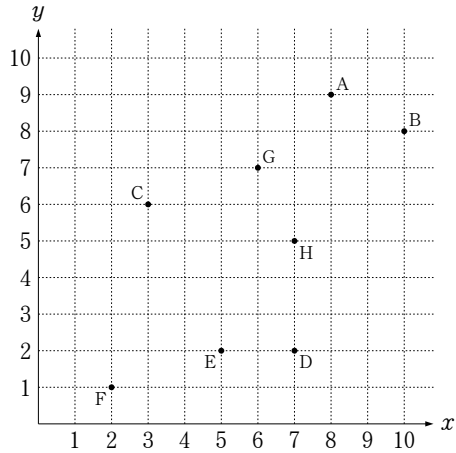
生徒	x	y
A	7.9	230
B	6.8	245
C	8.7	202
D	8.5	210
E	7.7	215
F	7.2	228
G	8.2	220
H	7.5	237

35 [相関の強弱] 2つの変量の間に正の相関または負の相関があるとき、散布図における点の分布が1つの直線に接近しているほど相関が といい、散らばっているほど相関が



36 [相関係数] 相関の正負や強弱を、散布図から感覚的に判断するのではなく、数値として表せるようにしたい。

(1) 右のデータについて、直線 $x = \bar{x}$ と $y = \bar{y}$ をかきなさい。また、その2直線に点A~Hからそれぞれ垂線を引いて、8個の長方形をつくりなさい。(ここでは辺の長さが0でも長方形とみなす)



生徒	x	y
A	8	9
B	10	8
C	3	6
D	7	2
E	5	2
F	2	1
G	6	7
H	7	5
合計	48	40
平均	6	5
分散	6	8

(2) (1)の8個の点 (x, y) がつくる8個の長方形について、横を $x - \bar{x}$ 、縦を $y - \bar{y}$ 、横×縦を面積として、その面積の平均値を求めなさい。(ここでは横、縦、面積が0や負になることも認める)

この値を といい、 で表す。

数学1 データの分析のtutorial No.12

8 データの相関

これまでは1つの変量について考えてきたが、ここでは身長と体重、数学の成績と英語の成績、睡眠時間と体力テストの得点など、2つの変量の関係について考える。

33 [相関の正負] 右のデータは、10人の生徒に行った試験の数学の得点 x と英語の得点 y である。右下の図は、各生徒の得点の組 (x, y) を点として座標平面に表したものである。

(1) このように、2つの変量からなるデータを平面上の点として図示したものを^ア **散布図** という。

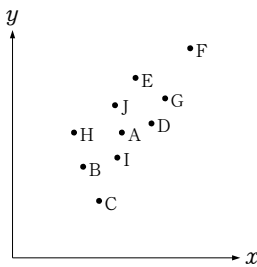
(2) この図から、2つの変量 x, y の関係について、どのようなことが分かるか。

解答 一方が増えると、他方も増える傾向がある。

(3) 一般に、一方が増加すると他方も増加する傾向があるとき、2つの変量の間には^イ **正の相関** があるという。また、一方が増加すると他方が減少する傾向があるときは^ウ **負の相関** があるといい、どちらの傾向もみられないときは^エ **相関がない** という。

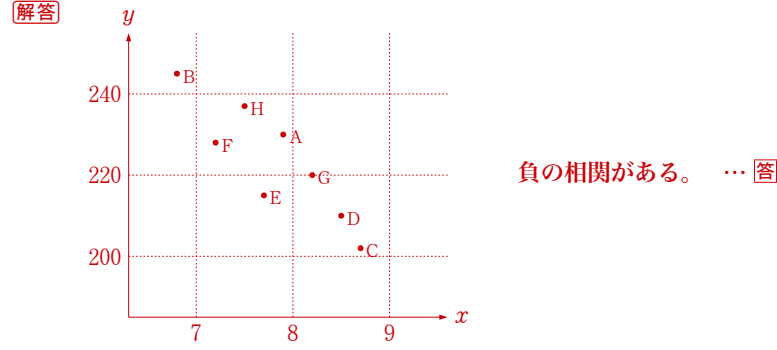
相関のことを相関関係ということもある。

生徒	x	y
A	48	55
B	31	40
C	38	25
D	61	59
E	54	79
F	78	92
G	67	70
H	27	55
I	46	44
J	45	67



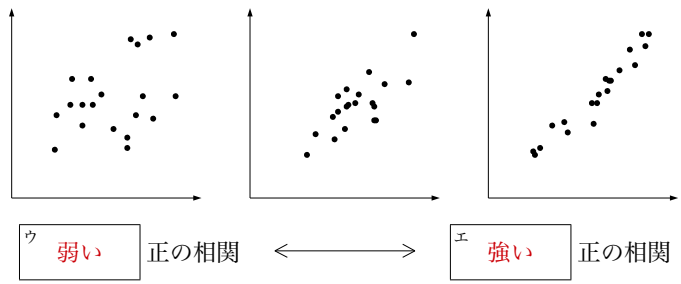
生徒	x	y
A	7.9	230
B	6.8	245
C	8.7	202
D	8.5	210
E	7.7	215
F	7.2	228
G	8.2	220
H	7.5	237

34 [相関の正負] 右のデータは、8人の高校生の50m走の記録 x 秒と立ち幅とびの記録 y cmである。このデータを散布図に表し、 x と y の相関関係を調べなさい。



解答

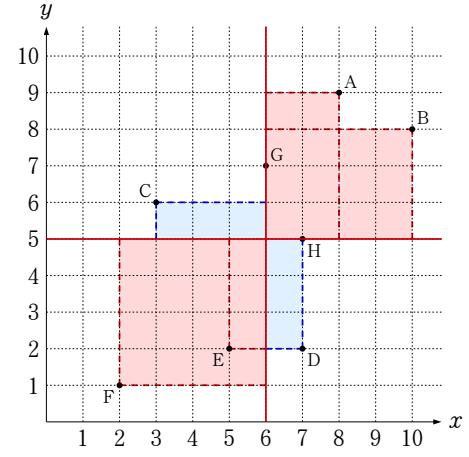
35 [相関の強弱] 2つの変量の間に正の相関または負の相関があるとき、散布図における点の分布が1つの直線に接近しているほど相関が^ア **強い** といい、散らばっているほど相関が^イ **弱い** という。



36 [相関係数] 相関の正負や強弱を、散布図から感覚的に判断するのではなく、数値として表せるようにしたい。

(1) 右のデータについて、直線 $x = \bar{x}$ と $y = \bar{y}$ をかきなさい。また、その2直線に点A～Hからそれぞれ垂線を引いて、8個の長方形をつくりなさい。(ここでは辺の長さが0でも長方形とみなす)

生徒	x	y
A	8	9
B	10	8
C	3	6
D	7	2
E	5	2
F	2	1
G	6	7
H	7	5
合計	48	40
平均	6	5
分散	6	8



(2) (1)の8個の点 (x, y) がつくる8個の長方形について、横を $x - \bar{x}$ 、縦を $y - \bar{y}$ 、横×縦を面積として、その面積の平均値を求めなさい。(ここでは横、縦、面積が0や負になることも認める)

解答 Aの面積は $2 \times 4 = 8$ 、Bの面積は $4 \times 3 = 12$ 、Cの面積は $-3 \times 1 = -3$ 、
Dの面積は $1 \times (-3) = -3$ 、Eの面積は $-1 \times (-3) = 3$ 、Fの面積は $-4 \times (-4) = 16$ 、
Gの面積は $0 \times 2 = 0$ 、Hの面積は $1 \times 0 = 0$

面積の平均値は、 $\frac{1}{8}(8 + 12 - 3 - 3 + 3 + 16 + 0 + 0) = \frac{33}{8}(= 4.125)$ … 答

この値を^ア **共分散** といい、^イ **S_{xy}** で表す。

- (3) (2)の結果, s_{xy} が正であったことから, x と y の間に の相関があると判断できる。
- (4) s_{xy} の絶対値は相関の強さを表していると考えられるが, 基準が分からないので, この値がどれくらい強いといえるのか判断できない。そこで, s_{xy} を x と y の標準偏差の積 $s_x s_y$ で割る。

$\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} = 0.59539\cdots \div 0.6$

この値を といい, または で表す。^{*5}

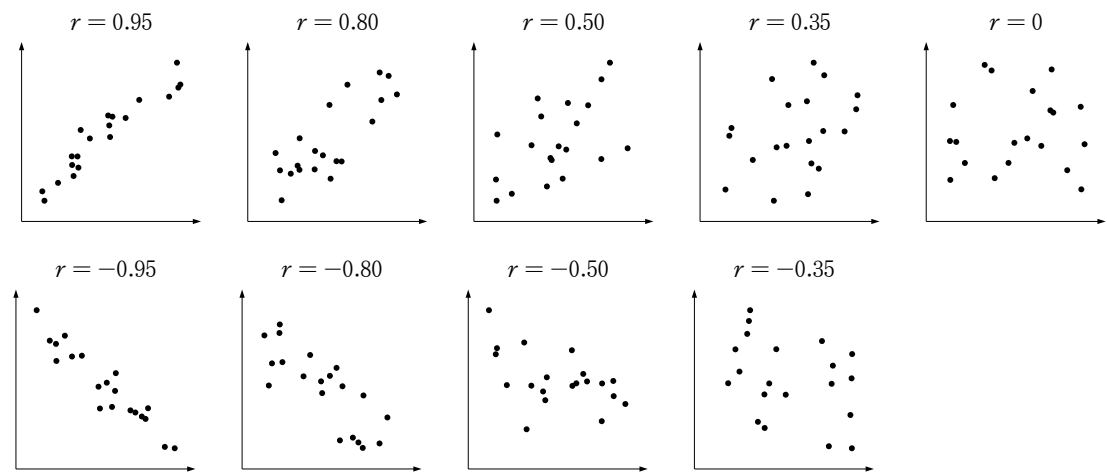
r の値域は であることが分かっている。 r の値が1に近いほど正の相関が強く, -1 に近いほど負の相関が強い。これを基準として, $r = 0.6$ の相関の強さを判断できる。

37 [共分散と相関係数の定義] 共分散と相関係数の定義をかきなさい。

共分散

相関係数

38 [散布図と相関係数の対応] 参考として, さまざまな散布図とその相関係数の例を示す。



39 [相関係数の求め方] 下の表は, 5人の生徒 A, B, C, D, E の身長 x (cm) と体重 y (kg) の測定結果である。相関係数 r_{xy} を求めなさい。答えは小数第2位までの概数にしなさい。 [リード問題集]

生徒	x	y					
A	169	59					
B	171	56					
C	175	61					
D	166	55					
E	174	59					
合計	855	290					
平均	171	58					

相関係数を求める式は, $\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n} \square}{\sqrt{\frac{1}{n} \triangle} \sqrt{\frac{1}{n} \bigcirc}}$ という形になっているので, 必ず $\frac{1}{n}$ で約分できる。

^{*5} 相関は英語で correlation であるが, r は relation ではなく, regression (回帰) に由来する。

数学1 データの分析のtutorial No.13

解答

- (3) (2)の結果、 s_{xy} が正であったことから、 x と y の間に 正 の相関があると判断できる。
- (4) s_{xy} の絶対値は相関の強さを表していると考えられるが、基準が分からないので、この値がどれくらい強いといえるのか判断できない。そこで、 s_{xy} を x と y の標準偏差の積 $s_x s_y$ で割る。

ア

$$\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\frac{33}{8}}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = 0.59539\cdots \div 0.6$$

この値を イ 相関係数 といい、ウ r または エ r_{xy} で表す。^{*5}

r の値域は オ $-1 \leq r \leq 1$ であることが分かっている。 r の値が1に近いほど正の相関が強く、
−1に近いほど負の相関が強い。これを基準として、 $r = 0.6$ の相関の強さを判断できる。

- 37 [共分散と相関係数の定義] 共分散と相関係数の定義をかきなさい。

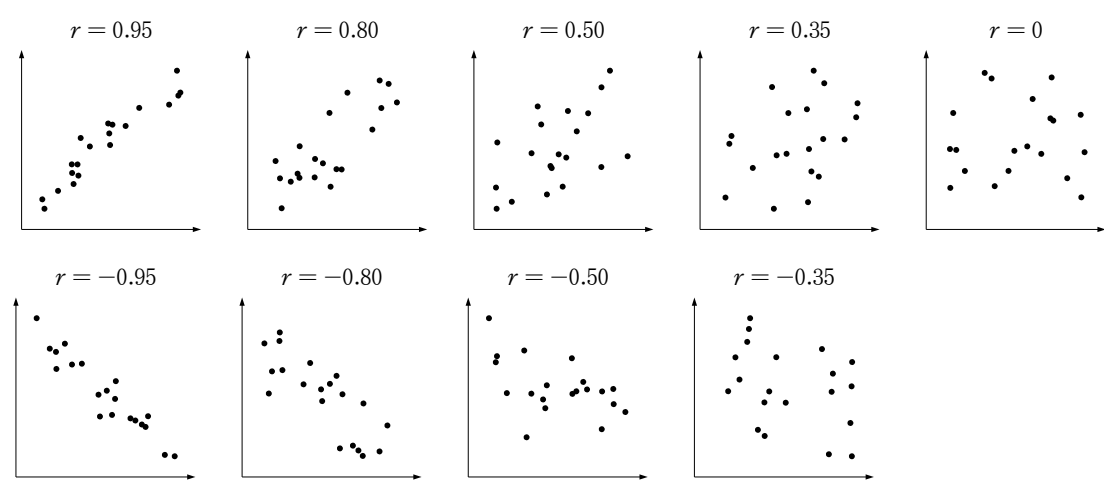
共分散

$$s_{xy} = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \cdots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \}$$

相関係数

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

- 38 [散布図と相関係数の対応] 参考として、さまざまな散布図とその相関係数の例を示す。



- 39 [相関係数の求め方] 下の表は、5 人の生徒 A, B, C, D, E の身長 x (cm) と体重 y (kg) の測定結果である。相関係数 r_{xy} を求めなさい。答えは小数第 2 位までの概数にきなさい。 [リード問題集]

生徒	x	y	$x - \bar{x}$	$y - \bar{y}$	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
A	169	59	−2	+1	4	1	−2
B	171	56	0	−2	0	4	0
C	175	61	+4	+3	16	9	12
D	166	55	−5	−3	25	9	15
E	174	59	+3	+1	9	1	3
合計	855	290	0	0	54	24	28
平均	171	58	0	0	10.8	4.8	5.6

[解答] $s_x^2 = 10.8$, $s_y^2 = 4.8$, $s_{xy} = 5.6$ より,

$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\frac{28}{5}}{\sqrt{\frac{54}{5}}\sqrt{\frac{24}{5}}} = \frac{28}{\sqrt{54}\sqrt{24}} = \frac{28}{3\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{7}{9} = 0.777\cdots \div \mathbf{0.78} \quad \cdots \text{答}$$

^{*5} 相関は英語で correlation であるが、 r は relation ではなく、regression (回帰) に由来する。

相関係数を求める式は、 $\frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n} \square}{\sqrt{\frac{1}{n} \triangle} \sqrt{\frac{1}{n} \bigcirc}}$ という形になっているので、必ず $\frac{1}{n}$ で約分できる。