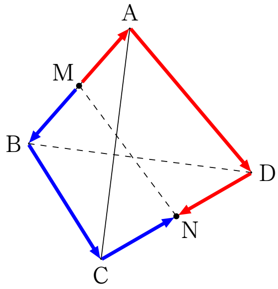
数学B　空間ベクトル　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［垂直の証明］ 正四面体 ABCD の辺 AB，CD の中点をそれぞれ M，N とするとき，$\mathrm{MN} \perp \mathrm{CD}$ をベクトルを用いて証明しなさい。



考え方 $\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$ を示す。

解答 $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DN}}$ …… ①　←図の赤ルート

$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}}$ …… ②　←図の青ルート

①＋② より，

$$2\overrightarrow{\mathrm{MN}} = (\overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{DN}}) + (\overrightarrow{\mathrm{MB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}})$$

$$= \overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$\leftarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} + \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{DN}} + \overrightarrow{\mathrm{CN}} = \vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}})$$

これと $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の内積をとると，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}} - \overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}) \cdots\cdots ③$$

どの面も合同な正三角形なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{CB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

←1 辺の長さを a とすると，どちらの内積も $\frac{1}{2}a^2$

よって，③ $= 0$，すなわち，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \neq \vec{0}$ なので，$\mathrm{MN} \perp \mathrm{CD}$　… 終

別解（位置ベクトルを使う方法）

点 A を始点とする点 B，C，D，M，N の位置ベクトルをそれぞれ，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$ とおく。

M，N はそれぞれ AB，CD の中点なので，

$$\vec{m} = \frac{\vec{b}}{2},\quad \vec{n} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \vec{n} - \vec{m} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} - \frac{\vec{b}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{d} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}) \cdot (\vec{d} - \vec{c})$$

$$= \frac{1}{2}\left(|\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{c}\right) \cdots\cdots ①$$

どの面も合同な正三角形なので，

$$|\vec{c}| = |\vec{d}|,\quad \vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

よって，① $= 0$，すなわち，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \neq \vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} \neq \vec{0}$ なので，$\mathrm{MN} \perp \mathrm{CD}$　… 終