数学 B　数列　No.1

解答

1 ［漸化式（誘導付き）］ $a_1=1$，$a_{n+1}=2+\dfrac{3}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。次の問いに答えなさい。 ［山口大］

(1) 方程式 $x=2+\dfrac{3}{x}$ の 2 つの実数解 α，β を求めなさい。ただし，$\alpha>\beta$ とする。

解答 $x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3,\ -1$

よって，$\boldsymbol{\alpha=3,\ \beta=-1}$ … 答

(2) (1) で求めた α，β に対して，$b_n=\dfrac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示しなさい。

解答 $b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$

n を $n+1$ に置き換えると，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}$$

これに $a_{n+1}=2+\dfrac{3}{a_n}$ を代入すると，

$$b_{n+1}=\frac{\left(2+\frac{3}{a_n}\right)-3}{\left(2+\frac{3}{a_n}\right)+1}=\frac{-a_n+3}{3a_n+3}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n-3}{a_n+1}=-\frac{1}{3}b_n$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比が $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。 … 終

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

解答 $b_1=\dfrac{a_1-3}{a_1+1}=\dfrac{1-3}{1+1}=-1$，および (2) の結果より，

$$b_n=-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots\cdots ①$$

$b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ を a_n について解くと，

$(a_n+1)b_n=a_n-3$

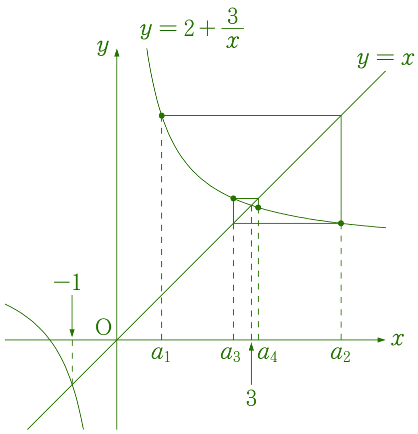
$(b_n-1)a_n=-3-b_n$

$$a_n=\frac{3+b_n}{1-b_n} \qquad (b_n \neq 1 \text{ より})$$

これに ① を代入すると，

$$a_n=\frac{3-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \quad \cdots\cdots ♠$$

$$=\frac{3+3\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}}{1-3\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}}=\boldsymbol{\frac{3(-3)^n+3}{(-3)^n-3}} \quad \cdots \text{答}$$



参考 (1) で求めたのは，直線 $y=x$ と双曲線 $y=2+\dfrac{3}{x}$ の交点の x 座標である。

数列 $\{a_n\}$ は，右上の図のように，その交点に近づいていく点列の x 座標を表している。

♠ で $n\to\infty$ とすると，a_n が 3 に収束することが確認できる。（数Ⅲ）