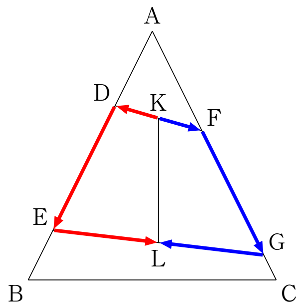
数学B　平面ベクトル　No.1

解答

1　［内積を利用した図形の証明］右の図のような，AB = AC である二等辺三角形 ABC がある。辺 AB 上に 2 点 D，E，辺 AC 上に 2 点 F，G を，DE = FG となるようにとり，DF，EG の中点をそれぞれ K，L とする。このとき，KL ⊥ BC であることを証明しなさい。



考え方　$\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ を示す。

解答　$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EL}$ …… ①　←図の赤ルート

$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GL}$ …… ②　←図の青ルート

①＋② より，

$$2\overrightarrow{KL}=(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EL})+(\overrightarrow{KF}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GL})$$

$$=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FG}$$

← $\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{KF}=\vec{0}$，$\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{GL}=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FG})\ \cdots\cdots ③$$

$\begin{cases}\mathrm{DE}=\mathrm{FG}\\ \mathrm{AB}=\mathrm{AC}\end{cases}$ より，$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{FG}}{\mathrm{AC}}=k$ とおくと，$\begin{cases}\overrightarrow{DE}=k\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{FG}=k\overrightarrow{AC}\end{cases}$

これを ③ に代入すると，

$$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}(k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\ \cdots\cdots ④$$

また，

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\ \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ の内積をとると，

$$\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{k}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$=\frac{k}{2}(|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2)$$

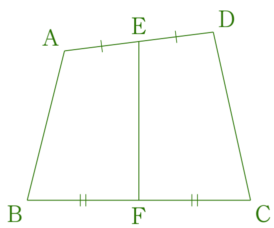
$$=0$$

← $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$ より

$\overrightarrow{KL}\neq\vec{0}$，$\overrightarrow{BC}\neq\vec{0}$ なので，

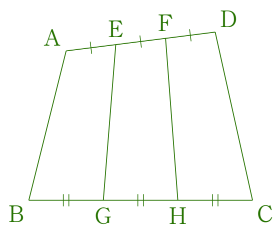
$\overrightarrow{KL}\perp\overrightarrow{BC}$　… 終

参考　次のような見方に慣れておこう。



$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{EF}$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{DC}$ の平均（のようなもの）



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{FH}$

$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{FH}$，$\overrightarrow{DC}$ はこの順に等差数列（のようなもの）