

# 数学 A 確率 No.1

解答

1 [日本シリーズ型の問題] 2人のプレイヤー A と B が対戦するゲームがある。1 戦あたり、A が勝つ確率は  $\frac{1}{3}$ 、B が勝つ確率は  $\frac{2}{3}$  であり、引き分けはない。A、B がくり返し試合をし、先に 4 勝した方を優勝とする。このとき、次の確率を求めなさい。

(1) 4 戦目で A が優勝する確率

解答 A が 4 戦全勝する確率を求める。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \dots \text{答}$$

(2) 5 戦目で A が優勝する確率

解答 4 戦目までに A が 3 勝 1 敗となり、かつ、5 戦目で A が勝つ確率を求める。

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{243} \dots \text{答}$$

(3) A が優勝する確率

解答 優勝するのは、4 戦目、5 戦目、6 戦目、7 戦目のどれかである。4 戦目と 5 戦目で優勝する確率はすでに (1)、(2) で求めたので、あとは 6 戦目と 7 戦目で優勝する確率を求めればよい。

[1] 6 戦目で A が優勝する確率

5 戦目までに A が 3 勝 2 敗となり、かつ、6 戦目で A が勝つ確率を求めればよいので、

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{40}{729}$$

[2] 7 戦目で A が優勝する確率

6 戦目までに A が 3 勝 3 敗となり、かつ、7 戦目で A が勝つ確率を求めればよいので、

$${}_6C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{160}{2187}$$

よって、A が優勝する確率は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{81} + \frac{8}{243} + \frac{40}{729} + \frac{160}{2187} \\ &= \frac{27+72+120+160}{2187} \\ &= \frac{379}{2187} \dots \text{答} \end{aligned}$$

参考 先に  $n$  勝した方を優勝とすると、A が優勝する確率  $p_n$  は次のようになる。

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$p_n$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{17}{81}$	$\frac{379}{2187}$	$\frac{2851}{19683}$	$\frac{89}{729}$	$\frac{55025}{531441}$
およそ	0.33	0.26	0.21	0.17	0.14	0.12	0.10

$n$  が大きいほど、弱い者が不利、強い者が有利となる。直感的にも何となく分かる。