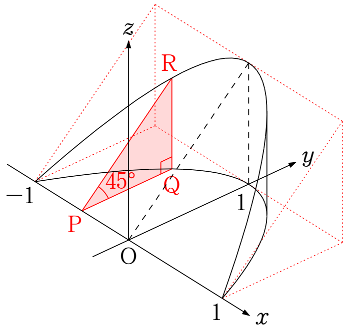
数学３　積分の応用　No.1

解答



$\boxed{1}$ ［**断面積と体積**］ 右の図は，$0 \leqq y \leqq 1-x^2$，$0 \leqq z \leqq 1$ で表される柱体を平面 $z=y$ で２つに切断したときの，点 $(0,\ 1,\ 0)$ を含む側である。

(1)　切断面の面積 S を求めなさい。

解答　平面 $x=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ でこの立体を切ったときの切断面を，右の図のように △PQR とする。
△PQR は ∠PQR $=90°$ の直角二等辺三角形であり，各頂点の座標は，
P$(t,\ 0,\ 0)$，Q$(t,\ 1-t^2,\ 0)$，R$(t,\ 1-t^2,\ 1-t^2)$ である。
線分 PR の長さを $L(t)$，△PQR の面積を $S(t)$ とすると，

$$L(t)=\sqrt{2}(1-t^2)$$
$$S(t)=\frac{1}{2}(1-t^2)^2=\frac{1}{2}(t^4-2t^2+1)$$

切断面の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} L(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{2}(1-t^2)dt \\ &= 2\int_{0}^{1} \sqrt{2}(1-t^2)dt \quad \text{←偶関数の性質を利用した} \\ &= 2\sqrt{2}\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= 2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}} \quad \cdots \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

参考　切断面は，柱体の底面を y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍に引き延ばした形なので，面積も底面積の $\sqrt{2}$ 倍になっている。

(2)　この立体の体積 V を求めなさい。

解答　(1) の $S(t)$ を使うと，求める体積 V は，

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} S(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(t^4-2t^2+1)dt \\ &= \int_{0}^{1} (t^4-2t^2+1)dt \quad \text{←偶関数の性質を利用した} \\ &= \left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1 \\ &= \boldsymbol{\frac{8}{15}} \quad \cdots \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$