数学3　積分　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［$t=\tan\dfrac{x}{2}$ と置換する積分］ 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$ を次の手順で求めなさい。

(1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\cos x$，$\dfrac{dx}{dt}$ をそれぞれ t の式で表しなさい。

解答
$$\begin{aligned}\cos x&=\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)\\&=2\cos^2\frac{x}{2}-1 &&\leftarrow 2\text{倍角の公式より}\\&=2\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}-1 &&\leftarrow\text{公式 }\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\text{ より}\\&=2\cdot\frac{1}{1+t^2}-1\\&=\boldsymbol{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

$t=\tan\dfrac{x}{2}$ の両辺を x で微分すると，

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx}&=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\\&=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} &&\leftarrow\text{公式 }\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\text{ より}\\&=\frac{1+t^2}{2}\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{dx}{dt}=\boldsymbol{\dfrac{2}{1+t^2}}$　$\cdots$答

(2) (1) の結果を使って，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx$ を求めなさい。

解答
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos x}dx&=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt &&\leftarrow(1)\text{ の結果より}\\&=\int\frac{2}{1-t^2}dt\\&=\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt &&\leftarrow\text{部分分数に分解した}\\&=-\log|1-t|+\log|1+t|+C\\&=\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C\\&=\boldsymbol{\log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|+C}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

参考　$t=\tan\dfrac{x}{2}$ とおくと，

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \tan x=\frac{2t}{1-t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

x の三角関数の積分は，この置き換えにより t の分数関数の積分で表すことができる。