数学 3　極限　No.1

解答

1 ［はさみうちの原理の利用］ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ であることを，次の手順にしたがって示しなさい。

(1)　$n>1$ のとき，$\sqrt[n]{n}>1$ を示しなさい。

解答　両辺の n 乗をそれぞれ求めると，

$$(\text{左辺})^n=(\sqrt[n]{n})^n=(n^{\frac{1}{n}})^n=n$$

$$(\text{右辺})^n=1^n=1$$

よって，$n>1$ のとき，$(\text{左辺})^n>(\text{右辺})^n$

両辺は正なので，$(\text{左辺})>(\text{右辺})$

すなわち，$\sqrt[n]{n}>1$　… 終

(2)　$\sqrt[n]{n}=1+a_n$ とおくとき，$n>\dfrac{n(n-1)}{2}{a_n}^2$ を示しなさい。

解答　$\sqrt[n]{n}=1+a_n$ とおくと，(1) より $\sqrt[n]{n}>1$ なので，$a_n>0$

$\sqrt[n]{n}=1+a_n$ の両辺を n 乗すると，

$$\begin{aligned} n&=(1+a_n)^n \\ &={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1a_n+{}_n\mathrm{C}_2{a_n}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{a_n}^n \end{aligned}$$

←二項定理を使って展開した

$a_n>0$ より，右辺の各項はすべて正なので，

$$n>{}_n\mathrm{C}_2{a_n}^2$$

$\leftarrow {}_n\mathrm{C}_2{a_n}^2$ だけ残して他を消した

すなわち，

$$n>\frac{n(n-1)}{2}{a_n}^2$$ … 終

(3)　$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を示しなさい。

解答　(2) より，

$$0<\frac{n(n-1)}{2}{a_n}^2<n$$

$$0<{a_n}^2<\frac{2}{n-1}$$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{n-1}=0$ なので，はさみうちの原理より，

$\lim_{x\to\infty}{a_n}^2=0$，すなわち，$\lim_{x\to\infty}a_n=0$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1+0=1$$ … 終