数学3　微分　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［置き換えの利用］ 関数 $y=\log\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$ について，$t=\sqrt{e^x+1}$ による置き換えを利用して，導関数 y' を求めなさい。

解答 $y=\log\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}=\log\dfrac{t-1}{t+1}$

両辺を t で微分すると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t+1}{t-1}\cdot\left(\frac{t-1}{t+1}\right)'=\frac{t+1}{t-1}\cdot\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{2}{t^2-1}=\frac{2}{e^x}\ \cdots\cdots ①$$

$t=\sqrt{e^x+1}$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{e^x+1}}\cdot(e^x+1)'=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\ \cdots\cdots ②$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\&=\frac{2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\qquad (①,\ ② より)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}}\quad\cdots 答\end{aligned}$$

参考 もちろん，置き換えを使わずに微分することもできる。

$$\begin{aligned}y&=\log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\\&=\log(\sqrt{e^x+1}-1)-\log(\sqrt{e^x+1}+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y'&=\frac{(\sqrt{e^x+1}-1)'}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{(\sqrt{e^x+1}+1)'}{\sqrt{e^x+1}+1}\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)(\sqrt{e^x+1})'\\&=\frac{2}{e^x}(\sqrt{e^x+1})'\\&=\frac{2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\\&=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}}\quad\cdots 答\end{aligned}$$