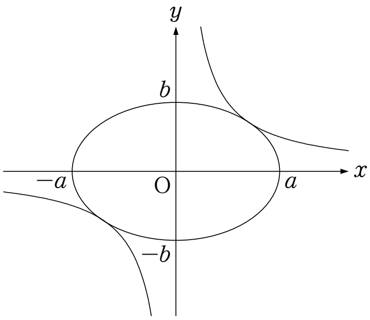
数学3　2次曲線　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**媒介変数表示の利用**］ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ が双曲線 $xy=1$ に接するための，a，b の条件を求めなさい。また，接点の座標を求めなさい。



解答 第1象限で接しているとき，同時に第3象限でも接するので，第1象限だけで考える。

第1象限にある楕円上の点を媒介変数 θ を使って，

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$　ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

と表す。

$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ を $xy=1$ に代入すると，

$$a\cos\theta\cdot b\sin\theta=1$$

$$\frac{1}{2}ab\sin 2\theta=1$$ ← sin の2倍角の公式を逆向きに使った

$$\sin 2\theta=\frac{2}{ab}\ \cdots\cdots ①$$

① を θ についての方程式とみる。

楕円と双曲線が接する

$\Longleftrightarrow$ 第1象限内に楕円と双曲線の共有点が1つしかない

$\Longleftrightarrow$ 方程式 ① が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に実数解を1つだけもつ $\cdots\cdots$ ②

条件 ② を満たすのは，$\dfrac{2}{ab}=1$ のときである。

よって，求める条件は，

$\boldsymbol{ab=2}$ $\cdots$ 答

また，その解は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，接点の座標は，

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$ $\cdots$ 答