数学 3　微分の応用　No.1

解答

1 ［平均値の定理の利用］ 平均値の定理を用いて，$\lim\limits_{a\to\infty}(\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a})$ を求めなさい。

解答 $f(x)=\sin x$ とおくと，$f(x)$ は実数全体で微分可能であり，$f'(x)=\cos x$

区間 $[\sqrt{a},\ \sqrt{a+1}]$ に平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(\sqrt{a+1})-f(\sqrt{a})}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}=f'(c) \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sqrt{a}<c<\sqrt{a+1} \quad \cdots\cdots ②$$

①，② を満たす実数 c が存在する。

① の分母を払って，

$$f(\sqrt{a+1})-f(\sqrt{a})=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})f'(c)$$

$$\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a}=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})\cos c=\frac{\cos c}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

$-1\leqq\cos c\leqq 1$ なので，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\cos c}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=0 \quad \cdots\cdots ♠$$

よって，

$$\lim_{a\to\infty}(\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a})=\mathbf{0} \quad \cdots \boxed{\text{答}}$$　（結局 ② は使わなかった）

参考 ♠ を丁寧に示すなら，はさみうちの原理を使う。

$-1\leqq\cos c\leqq 1$ の各辺に $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\ (>0)$ をかけると，

$$-\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\leqq\frac{\cos c}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\leqq\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

$\lim\limits_{a\to\infty}$(左辺)$=0$，$\lim\limits_{a\to\infty}$(右辺)$=0$ より，$\lim\limits_{a\to\infty}$(中辺)$=0$

別解 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ とおいてもよい。

この場合，$f(x)$ は $x>0$ で微分可能で，$f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

区間 $[a,\ a+1]$ に平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=f'(c) \quad \cdots\cdots ①$$

$$a<c<a+1 \quad \cdots\cdots ②$$

①，② を満たす実数 c が存在する。

① より，$\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a}=\dfrac{\cos\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}$

② より，$a\to\infty$ のとき $c\to\infty$

よって，

$$\lim_{a\to\infty}(\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a})=\lim_{c\to\infty}\frac{\cos\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}=\mathbf{0} \quad \cdots \boxed{\text{答}}$$

これも，最後の $=0$ のところは，はさみうちの原理を使って示せる。