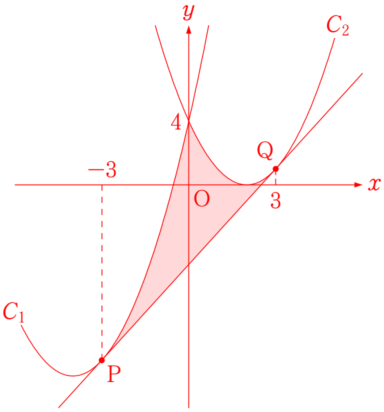
数学2　積分　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**放物線と接線に囲まれた面積**］ 2つの放物線 $C_1 : y = y = x^2+8x+4$，$C_2 : x^2-4x+4$ があり，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする。

(1) 直線 l の方程式を求めなさい。



解答 C_1 について，$y' = 2x+8$

C_2 について，$y' = 2x-4$

C_1 上の点を $P(s,\ s^2+8s+4)$ と表し，

C_2 上の点を $Q(t,\ t^2-4t+4)$ と表す。

点 P における C_1 の接線は，

$$y = (2s+8)(x-s)+(s^2+8s+4)$$
$$= (2s+8)x - s^2 + 4 \quad \cdots\cdots ①$$

点 Q における C_2 の接線は，

$$y = (2t-4)(x-t)+(t^2-4t+4)$$
$$= (2t-4)x - t^2 + 4 \quad \cdots\cdots ②$$

① と ② が同一の直線を表すとき，

$$\begin{cases} 2s+8 = 2t-4 \\ -s^2+4 = -t^2+4 \end{cases} \quad \text{（←傾きと } y \text{ 切片がともに一致する）}$$

これを解いて，$s=-3$，$t=3$

よって，$P(-3,\ -11)$，$Q(3,\ 1)$ となり，

直線 PQ の方程式を求めると，$\boldsymbol{y = 2x-5}$ … 答

(2) C_1，C_2，l に囲まれた部分の面積を求めなさい。

解答 2つの区間 $[-3,\ 0]$，$[0,\ 3]$ に分けて求める。

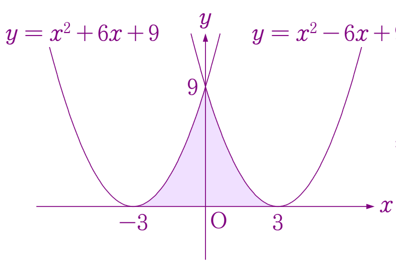
$$\int_{-3}^{0}\{(x^2+8x+4)-(2x-5)\}dx + \int_{0}^{3}\{(x^2-4x+4)-(2x-5)\}dx$$
$$= \int_{-3}^{0}(x^2+6x+9)dx + \int_{0}^{3}(x^2-6x+9)dx \quad \cdots\cdots ♠$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3+3x^2+9x\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{0}^{3}$$
$$= 9+9$$
$$= \boldsymbol{18} \quad \cdots \text{答}$$

別解 ♠ から判断すると，求める面積は図1の色のついた部分に等しく，さらに図2の面積と等しい。

6分の1公式を使うと，

$$6 \cdot 9 - \frac{1}{6} \cdot 6^3 = 54 - 36 = \boldsymbol{18} \quad \cdots \text{答}$$

図1



=

図2