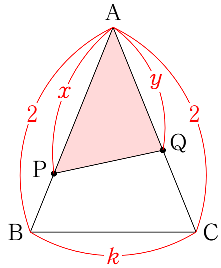
数学2　式と証明　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**相加平均・相乗平均の利用**］ $AB=AC=2$，$BC=k$ の $\triangle ABC$ において，辺 AB，AC 上にそれぞれ点 P，Q を，線分 PQ が $\triangle ABC$ の面積を二等分するようにとる。このとき，線分 PQ の長さの最小値を k で表しなさい。



解答　$AP=x$，$AQ=y$ とおく。

$2\triangle APQ=\triangle ABC$ より，

$$2\left(\frac{1}{2}xy\sin A\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin A$$

すなわち，

$$xy=2 \quad \cdots\cdots ①$$

$\triangle ABC$ に余弦定理を用いて，

$$\cos A=\frac{2^2+2^2-k^2}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{8-k^2}{8} \quad \cdots\cdots ②$$

$\triangle APQ$ に余弦定理を用いて，

$$\begin{aligned}
PQ^2&=x^2+y^2-2xy\cos A\\
&=x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2-2\cdot 2\cos A && (\leftarrow ①\text{ より})\\
&=x^2+\frac{4}{x^2}-4\cos A\\
&\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}-4\cos A && (\leftarrow \text{相加平均・相乗平均の関係より})\\
&=4-4\cos A\\
&=4-4\cdot\frac{8-k^2}{8} && (\leftarrow ②\text{ より})\\
&=\frac{k^2}{2}
\end{aligned}$$

$$PQ=\frac{k}{\sqrt{2}}$$

等号成立条件は，$x^2=\dfrac{4}{x^2}$，すなわち，$x=\sqrt{2}$

よって，$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき，PQ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{k}{\sqrt{2}}}$ をとる。　… 答