数学2 図形と方程式 No.1

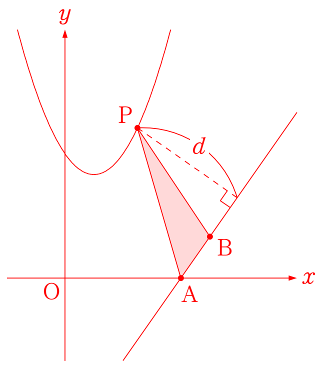
解答

$\boxed{1}$ ［**点と直線の距離の利用**］ 2点 A(4, 0)，B(5, 2) と，放物線 $y=x^2-2x+6$ 上を動く点 P がある。このとき，△ABP の面積の最小値を求めなさい。

考え方 点 P が直線 AB に最も近づくとき，△ABP の面積は最小となる。

解答 直線 AB の方程式は，$2x-y-8=0$

点 P の座標を $(t,\ t^2-2t+6)$ とし，点 P と直線 AB との距離を d とすると，



$$\begin{aligned} d &= \frac{|2t-(t^2-2t+6)-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \\ &= \frac{|-t^2+4t-14|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{|t^2-4t+14|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{(t-2)^2+10}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$t=2$ のとき，d は最小値 $\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ をとる。

また，$\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

よって，△ABP の面積の最小値は，

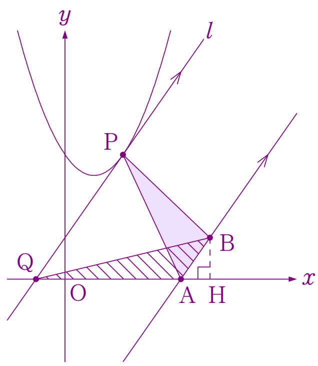
$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABP} &= \frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5} \\ &= \mathbf{5} \quad \cdots \boxed{答} \end{aligned}$$

別解 （数Ⅰ）

放物線に直線 AB に平行な接線 l をひく。

点 P がこの接点にあるとき，△ABP の面積は最小になる。

直線 l の方程式を，$y=2x+b$ とおく。



$$\begin{cases} y=x^2-2x+6 \\ y=2x+b \end{cases}$$

y を消去すると，$x^2-4x+6-b=0$

これが重解をもつときを考えると，

判別式 $D=(-4)^2-4(6-b)=0$

これを解いて，$b=2$

よって，直線 l の方程式は，$y=2x+2$

この直線の x 切片は -1

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABP} &= \triangle\mathrm{ABQ} \\ &= \frac{1}{2}\times\mathrm{AQ}\times\mathrm{BH} \\ &= \frac{1}{2}\times5\times2 \\ &= \mathbf{5} \quad \cdots \boxed{答} \end{aligned}$$

等積変形は必須ではなく，$b=2$ から接点 P(2, 6) を求め，3点 A，B，P の座標から △ABP の面積を直接求めてもよい。