数学2　三角関数　No.1

解答

1　［三角関数を含む方程式］k を実数とする。θ についての方程式 $2\cos\theta+3\sin\theta=k$ が $0<\theta<\pi$ の範囲に異なる2つの解をもつような k の範囲を求めなさい。

解答（三角関数の合成を使った解法）

$2\cos\theta+3\sin\theta=k$ の左辺を合成すると，

$$\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)=k \quad \cdots\cdots ①$$

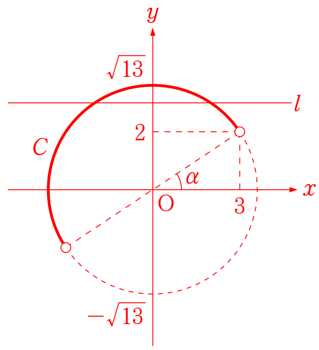
ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

また，$0<\theta<\pi$ より，

$$\alpha<\theta+\alpha<\alpha+\pi \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より，解 θ は，右の図の半円の弧 C と，直線 $l : y=k$ の共有点に対応する。図形的に考えて，C と l が異なる2個の共有点をもつような k の範囲を求めると，

$\mathbf{2<\boldsymbol{k}<\sqrt{13}}$ … 答



別解（合成を使わない方法）

$2\cos\theta+3\sin\theta=k$ で，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおくと，

$$2x+3y=k$$

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{k}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$0<\theta<\pi$ より，

$$x^2+y^2=1 \quad (y>0) \quad \cdots\cdots ②$$

① が表す直線を l，② が表す半円の弧を C とする。C と l が異なる2個の共有点をもつような l の y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の範囲を求める。

右の図で，△AOP，△OHQ は，いずれも3辺の比が $2:3:\sqrt{13}$ の直角三角形であることを考えると，

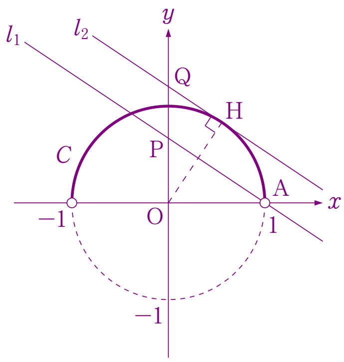
$$\mathrm{OP}=\frac{\sqrt{13}}{3} \quad （直線 l_1 の y 切片）$$

$$\mathrm{OQ}=\frac{2}{3} \quad （直線 l_2 の y 切片）$$

よって，求める範囲は，

$$\frac{2}{3}<\frac{k}{3}<\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$\mathbf{2<\boldsymbol{k}<\sqrt{13}}$ … 答



参考　2つの解法は図形的にはほとんど同じである。