数学Ⅰ　三角比　No.1

解答

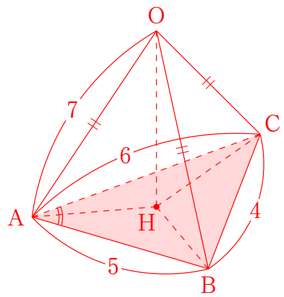
1 ［三脚型の体積］ $OA=OB=OC=7$，$AB=5$，$BC=4$，$CA=6$ である四面体 OABC の体積 V を求めなさい。

考え方 三脚型の三角錐は，頂点から底面に下ろした垂線の足が，底面の三角形の外心になっている。

解答 △ABC において，余弦定理より，

$$\cos\angle BAC=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{3}{4}$$

$$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4} \quad \cdots\cdots ①$$



よって，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \cdots\cdots ②$$

O から底面 ABC に下ろした垂線を OH とする。

△OHA，△OHB，△OHC において，

$OA=OB=OC$，$\angle OHA=\angle OHB=\angle OHC=90°$，OH は共通なので，

$\triangle OHA\equiv\triangle OHB\equiv\triangle OHC$

よって，$AH=BH=CH$ となるので，H は △ABC の外心である。

△ABC において，正弦定理より，

$$\frac{4}{\sin\angle BAC}=2AH$$

これに ① を代入して解くと，

$$AH=\frac{8}{\sqrt{7}}$$

△OHA において，三平方の定理より，

$$OH=\sqrt{7^2-\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{31}}{\sqrt{7}} \quad \cdots\cdots ③$$

②，③ より，求める体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{15\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{31}}{\sqrt{7}}=\mathbf{\frac{15\sqrt{31}}{4}} \quad \cdots \boxed{答}$$