数学1　2次関数　No.2

解答

$\boxed{1}$ ［置き換えを使う最大・最小］ $0 \leqq x \leqq 6$ のとき，関数 $y=-2\left(\frac{1}{4}x^2-x\right)^2+4\left(\frac{1}{4}x^2-x\right)+9$ の最大値と最小値を次にしたがって求めなさい。

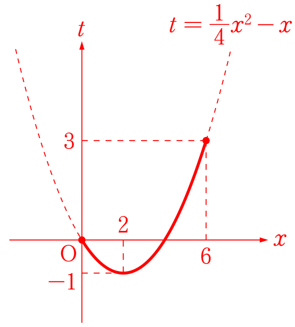
(1) $t=\frac{1}{4}x^2-x$ とおくとき，t の変域を求めなさい。

解答 $t=\frac{1}{4}x^2-x$

$=\frac{1}{4}(x-2)^2-1 \quad (0 \leqq x \leqq 6)$

よって，x と t の関係をグラフに表すと右の図のようになる。

図より，$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 3}$ … 答



(2) y の最大値と最小値，および，そのときの x の値を求めなさい。

解答 $y=-2t^2+4t+9$

$=-2(t-1)^2+11 \quad (-1 \leqq t \leqq 3)$

よって，t と y の関係をグラフに表すと右の図のようになる。

［1］ 最大値について

図より，$t=1$ のとき，y は最大値 11 をとる。

このとき，(1) より，$1=\frac{1}{4}x^2-x$

これを解いて，$x=2\pm 2\sqrt{2}$

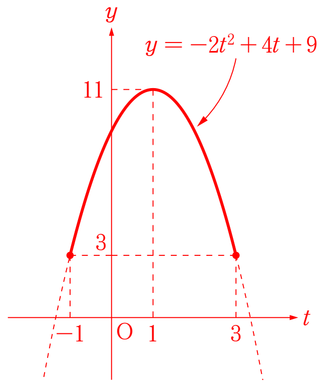
ただし，$1 \leqq x \leqq 6$ なので，$x=2+2\sqrt{2}$

［2］ 最小値について

図より，$t=-1$，3 のとき，y は最小値 3 をとる。

$t=-1$ のとき，(1) のグラフより，$x=2$

$t=3$ のとき，(1) のグラフより，$x=6$



［1］，［2］をまとめると，

$\begin{cases} \boldsymbol{x=2+2\sqrt{2}} \text{ のとき，} \boldsymbol{y} \text{ は最大値 11 をとる。} \\ \boldsymbol{x=2,\ 6} \text{ のとき，} \boldsymbol{y} \text{ は最小値は 3 をとる。} \end{cases}$ … 答

参考 関数 $y=-2\left(\frac{1}{4}x^2-x\right)^2+4\left(\frac{1}{4}x^2-x\right)+9$

のグラフは右の図のようになっている。

上の解法は，この関数を，

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-x$

$g(t)=-2t^2+4t+9$

という 2 つの関数の合成関数 $g(f(x))$ とみなし，$f(x)$ と $g(t)$ に分解して考えたことになる。