数学C　平面ベクトル　No.1

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

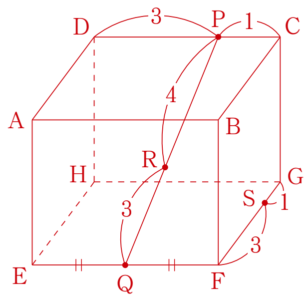
$\boxed{1}$ ［**共線の証明**］直方体 ABCD-EFGH において，辺 CD を 1：2 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q，線分 PQ を 4：3 に内分する点を R とする。また，辺 FG を 3：1 に内分する点を S とする。このとき，3 点 A，R，S は同一直線上にあることを証明しなさい。

数学C　平面ベクトル　No.1

解答

1 ［**共線の証明**］直方体 ABCD-EFGH において，辺 CD を $1:2$ に内分する点を P，辺 EF の中点を Q，線分 PQ を $4:3$ に内分する点を R とする。また，辺 FG を $3:1$ に内分する点を S とする。このとき，3 点 A，R，S は同一直線上にあることを証明しなさい。

考え方　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$（$k$ は実数）を示せばよい。



解答　点 A を始点とする点 B，D，E，P，Q，R，S の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ とする。

$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を，$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ で表すと，

$$\vec{p}=\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}$$

$$\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{e}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\frac{3}{7}\vec{p}+\frac{4}{7}\vec{q}\\&=\frac{3}{7}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{e}\right)\\&=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{d}+\frac{4}{7}\vec{e}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$\vec{s}$ を，$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ で表すと，

$$\vec{s}=\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{d}+\vec{e}\qquad\cdots\cdots ②$$

①，② より，

$$\vec{s}=\frac{7}{4}\vec{r}$$

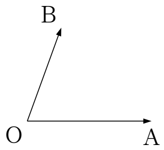
すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ なので，3 点 A，R，S は同一直線上にある。　… 終

数学C　平面ベクトル　No.2

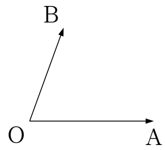
名前

$\boxed{1}$ ［**点の存在範囲**］ 平面上に定点 O，A，B がある。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で，s，t が次の条件を満たすとき，点 P の存在する範囲を求めなさい。

(1)　$s+t=2$，$s>0$，$t>0$

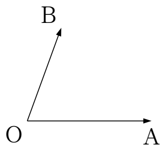


(2)　$t=2s$，$s>0$，$t>0$

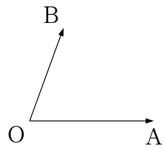


$\boxed{2}$ ［**点の存在範囲**］ 平面上に定点 O，A，B がある。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で，s，t が次の条件を満たすとき，点 P の存在する範囲を求めなさい。

(1)　$0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 2$



(2)　$1 < s+t < 2$，$s>0$，$t>0$

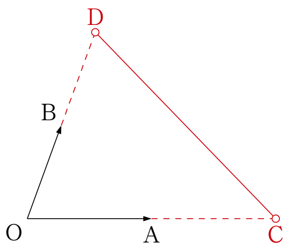


数学C　平面ベクトル　No.2

解答

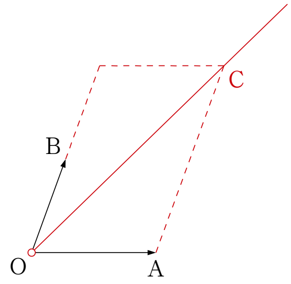
$\boxed{1}$ ［**点の存在範囲**］ 平面上に定点 O，A，B がある。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で，s，t が次の条件を満たすとき，点 P の存在する範囲を求めなさい。

(1)　$s + t = 2$，$s > 0$，$t > 0$



答　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，線分 CD（ただし両端は含まない）

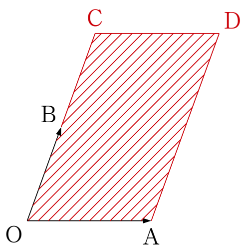
(2)　$t = 2s$，$s > 0$，$t > 0$



答　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，半直線 OC（ただし端点 O は含まない）

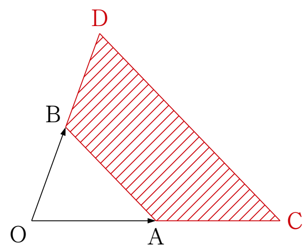
$\boxed{2}$ ［**点の存在範囲**］ 平面上に定点 O，A，B がある。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で，s，t が次の条件を満たすとき，点 P の存在する範囲を求めなさい。

(1)　$0 \leqq s \leqq 1$，$0 \leqq t \leqq 2$



答　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき，平行四辺形 OADC の内部および周

(2)　$1 < s + t < 2$，$s > 0$，$t > 0$



答　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，台形 ACDB の内部（ただし周は含まない）

数学C　空間ベクトル　No.1

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

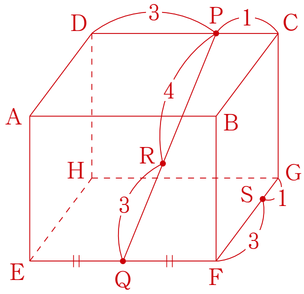
$\boxed{1}$ ［**共線の証明**］直方体 ABCD-EFGH において，辺 CD を 1：2 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q，線分 PQ を 4：3 に内分する点を R とする。また，辺 FG を 3：1 に内分する点を S とする。このとき，3 点 A，R，S は同一直線上にあることを証明しなさい。

数学C　空間ベクトル　No.1

解答

1 ［**共線の証明**］直方体 ABCD-EFGH において，辺 CD を 1：2 に内分する点を P，辺 EF の中点を Q，線分 PQ を 4：3 に内分する点を R とする。また，辺 FG を 3：1 に内分する点を S とする。このとき，3 点 A，R，S は同一直線上にあることを証明しなさい。

考え方　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AR}}$（$k$ は実数）を示せばよい。



解答　点 A を始点とする点 B，D，E，P，Q，R，S の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$ とする。

$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を，$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ で表すと，

$$\vec{p}=\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}$$

$$\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{e}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\frac{3}{7}\vec{p}+\frac{4}{7}\vec{q}\\&=\frac{3}{7}\left(\frac{2}{3}\vec{b}+\vec{d}\right)+\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{e}\right)\\&=\frac{4}{7}\vec{b}+\frac{3}{7}\vec{d}+\frac{4}{7}\vec{e}\qquad\cdots\cdots ①\end{aligned}$$

$\vec{s}$ を，$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$ で表すと，

$$\vec{s}=\vec{b}+\frac{3}{4}\vec{d}+\vec{e}\qquad\cdots\cdots ②$$

①，② より，

$$\vec{s}=\frac{7}{4}\vec{r}$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ なので，3 点 A，R，S は同一直線上にある。　… 終

数学C　空間ベクトル　No.2

名前

$\boxed{1}$ ［**点と平面の距離**］4点 O(0, 0, 0)，A(1, 2, 0)，B(2, 0, 1)，C(0, 1, 1) を頂点とする四面体 OABC について，次の問いに答えなさい。

(1) 平面 ABC の方程式を求めなさい。

(2) 点 O と平面 ABC の距離 h を求めなさい。

(3) △ABC の面積 S を求めなさい。

(4) 四面体 OABC の体積 V を求めなさい。

数学C　空間ベクトル　No.2

解答

1 ［**点と平面の距離**］4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 2, 0)，B(2, 0, 1)，C(0, 1, 1) を頂点とする四面体 OABC について，次の問いに答えなさい。

(1)　平面 ABC の方程式を求めなさい。

解答 平面 ABC の方程式を $ax+by+cz+d=0$ とおく。……①

A(1, 2, 0)，B(2, 0, 1)，C(0, 1, 1) をそれぞれ代入すると，

$$\begin{cases} a+2b+d=0 \\ 2a+c+d=0 \\ b+c+d=0 \end{cases}$$

これを a，b，c について解くと，

$$a=-\frac{1}{5}d,\quad b=-\frac{2}{5}d,\quad c=-\frac{3}{5}d$$

① に代入すると，

$$-\frac{1}{5}dx-\frac{2}{5}dy-\frac{3}{5}dz+d=0$$

$$dx+2dy+3dz-5d=0$$

$$d(x+2y+3z-5)=0$$

$$d=0 \text{ または } x+2y+3z-5=0$$

$d=0$ のときは $a=b=c=0$ となり，① が平面を表さないので，$d\neq 0$

よって，平面 ABC の方程式は，$\boldsymbol{x+2y+3z-5=0}$　… 答

(2)　点 O と平面 ABC の距離 h を求めなさい。

解答 $h=\dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}$　← 点と平面の距離の公式

$=\dfrac{\mathbf{5}}{\sqrt{\mathbf{14}}}$　… 答

(3)　△ABC の面積 S を求めなさい。

解答 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ -2,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ -1,\ 1)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=1+4+1=6$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=1+1+1=3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-1+2+1=2$$

よって，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6\cdot 3-2^2}$$

$=\dfrac{\sqrt{\mathbf{14}}}{\mathbf{2}}$　… 答

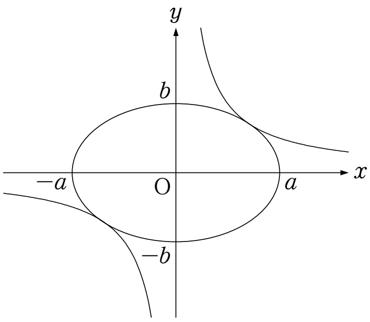
(4)　四面体 OABC の体積 V を求めなさい。

解答 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{14}}{2}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{14}}=\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$　… 答

数学C　平面上の曲線　No.1

名前

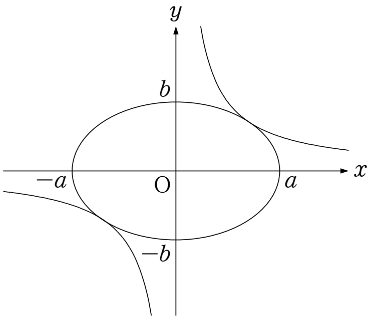
$\boxed{1}$ ［**媒介変数表示の利用**］ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ が双曲線 $xy=1$ に接するための，a，b の条件を求めなさい。また，接点の座標を求めなさい。



数学C　平面上の曲線　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**媒介変数表示の利用**］ 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ が双曲線 $xy=1$ に接するための，a，b の条件を求めなさい。また，接点の座標を求めなさい。



解答 第 1 象限で接しているとき，同時に第 3 象限でも接するので，第 1 象限だけで考える。

第 1 象限にある楕円上の点を媒介変数 θ を使って，

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$　ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$

と表す。

$x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ を $xy=1$ に代入すると，

$a\cos\theta\cdot b\sin\theta=1$

$\dfrac{1}{2}ab\sin2\theta=1$　← sin の 2 倍角の公式を逆向きに使った

$\sin2\theta=\dfrac{2}{ab}$ …… ①

① を θ についての方程式とみる。

楕円と双曲線が接する

$\Longleftrightarrow$ 第 1 象限内に楕円と双曲線の共有点が 1 つしかない

$\Longleftrightarrow$ 方程式 ① が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に実数解を 1 つだけもつ …… ②

条件 ② を満たすのは，$\dfrac{2}{ab}=1$ のときである。

よって，求める条件は，$\boldsymbol{ab=2}$ … 答

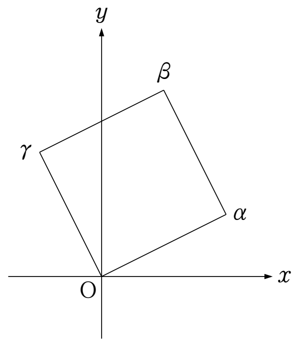
また，その解は $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，接点の座標は，

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$，$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)$ … 答

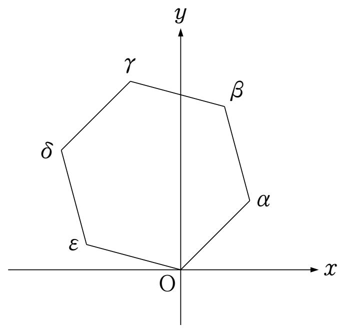
数学C　複素数平面　No.1

名前

$\boxed{1}$［**原点を中心とする回転と拡大**］$\alpha=4+2i$ とする。O から左回りに点 α, β, γ をとって正方形をつくるとき，β, γ を表す複素数をそれぞれ求めなさい。

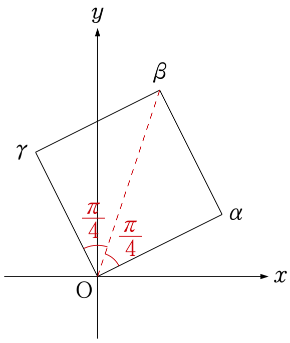


$\boxed{2}$［**原点を中心とする回転と拡大**］$\alpha=1+i$ とする。O から左回りに α, β, γ, δ, ε と点をとって正六角形をつくるとき，β, γ を表す複素数をそれぞれ求めなさい。



数学C　複素数平面　No.1

解答



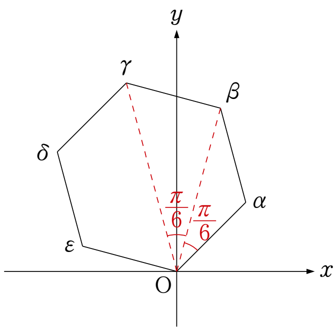
1 ［**原点を中心とする回転と拡大**］$\alpha=4+2i$ とする。O から左回りに点 α，β，γ をとって正方形をつくるとき，β，γ を表す複素数をそれぞれ求めなさい。

解答 点 β は，点 α を原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転し，$\sqrt{2}$ 倍に拡大した位置にあるので，

$$\begin{aligned}\beta&=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\alpha\\&=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(4+2i)\\&=(1+i)(4+2i)\\&=\mathbf{2+6}\boldsymbol{i}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

点 γ は，点 α を原点を中心に $\frac{\pi}{2}$ 回転した位置にあるので，

$$\begin{aligned}\gamma&=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\alpha\\&=(0+i)(4+2i)\\&=\mathbf{-2+4}\boldsymbol{i}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$



2 ［**原点を中心とする回転と拡大**］$\alpha=1+i$ とする。O から左回りに α，β，γ，δ，ε と点をとって正六角形をつくるとき，β，γ を表す複素数をそれぞれ求めなさい。

解答 点 β は，点 α を原点を中心に $\frac{\pi}{6}$ 回転し，$\sqrt{3}$ 倍に拡大した位置にあるので，

$$\begin{aligned}\beta&=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\alpha\\&=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(1+i)\\&=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

点 γ は，点 α を原点を中心に $\frac{\pi}{3}$ 回転し，2 倍に拡大した位置にあるので，

$$\begin{aligned}\gamma&=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\alpha\\&=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i)\\&=\boldsymbol{1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

参考 δ はデルタ，ε はイプシロンと読む。

数学C　複素数平面　No.2

名前 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**ジューコフスキー変換**］ $a>0$, $r>0$ とする。点 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$w=z+\dfrac{a^2}{z}$ で表される点 w はどのような図形を描くか。

数学C　複素数平面　No.2

解答

1　［ジューコフスキー変換］$a>0$，$r>0$ とする。点 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$w=z+\dfrac{a^2}{z}$ で表される点 w はどのような図形を描くか。

解答　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ と表すと，

$$\begin{aligned}w&=z+\frac{a^2}{z}\\&=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{a^2}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}\\&=r(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{a^2}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\&=\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta+i\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta\end{aligned}$$

$w=x+yi$ (x，y は実数) とおくと，

$$x=\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

$$y=\left(r-\frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$

(i)　$r\fallingdotseq a$ のとき

$$\cos\theta=\frac{x}{r+\dfrac{a^2}{r}}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r-\dfrac{a^2}{r}}\qquad\leftarrow r-\frac{a^2}{r}\fallingdotseq 0\text{ より}$$

これを $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ に代入すると，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{\left(r+\dfrac{a^2}{r}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(r-\dfrac{a^2}{r}\right)^2}=1}$$

よって，**点 w はこの方程式が表す楕円を描く。**　… 答

(ii)　$r=a$ のとき

$$x=2a\cos\theta$$

$$y=0$$

$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より，$-2a\leqq x\leqq 2a$

よって，**点 w は 2 点 $-2a$ と $2a$ を結ぶ線分を描く。**　… 答

参考　楕円のとき，焦点の座標を $(c,\ 0)$，$(-c,\ 0)$（ただし $c>0$）とすると，

$$c^2=\left(r+\frac{a^2}{r}\right)^2-\left(r-\frac{a^2}{r}\right)^2=4a^2$$

$$c=2a$$

よって，焦点の座標は $(2a,\ 0)$，$(-2a,\ 0)$ である。

また，楕円上の点の 2 焦点からの距離の和を l とすると，相加平均・相乗平均の関係より，

$$l=2\left(r+\frac{a^2}{r}\right)\geqq 2\sqrt{2r\cdot\frac{2a^2}{r}}=4a$$

等号が成り立つのは $r=a$ のときであり，このときは楕円ではなく線分である。