# 数学B　数列　No.1

名前

$\boxed{1}$ ［**等差数列であることの証明**］ 等差数列 $\{a_n\}$ の最初の 3 項の和を $b_1$ とし，次の 3 項の和を $b_2$，その次の 3 項の和を $b_3$，…… というように，$a_n$ の 3 項ずつの和を項とする数列 $\{b_n\}$ をつくる。このとき，数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることを証明しなさい。

$\boxed{2}$ ［**等比数列であることの証明**］ $a_n = 3^n$，$b_n = 5^n$ とするとき，$c_n = a_n b_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを証明しなさい。

# 数学B　数列　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**等差数列であることの証明**］ 等差数列 $\{a_n\}$ の最初の 3 項の和を $b_1$ とし，次の 3 項の和を $b_2$，その次の 3 項の和を $b_3$，…… というように，$a_n$ の 3 項ずつの和を項とする数列 $\{b_n\}$ をつくる。このとき，数列 $\{b_n\}$ は等差数列であることを証明しなさい。

考え方　$\{b_n\}$ が等差数列 $\Longleftrightarrow$ 任意の自然数 $n$ に対して $b_{n+1}-b_n=$ (定数)

解答　等差数列 $\{a_n\}$ の公差を $d$ とする。

数列 $\{b_n\}$ の一般項を $\{a_n\}$ の項を用いて表すと，

$$b_n=a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n} \quad \cdots\cdots ①$$

$n$ を $n+1$ に置き換えると，

$$b_{n+1}=a_{3n+1}+a_{3n+2}+a_{3n+3} \quad \cdots\cdots ②$$

② − ① より，

$$\begin{aligned} b_{n+1}-b_n &= (a_{3n+1}+a_{3n+2}+a_{3n+3})-(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}) \\ &= (a_{3n+1}-a_{3n-2})+(a_{3n+2}-a_{3n-1})+(a_{3n+3}-a_{3n}) \\ &= 3d+3d+3d \\ &= 9d \end{aligned}$$

これに $n$ に関係ない定数である。

よって，数列 $\{b_n\}$ は等差数列である。　… 終

$\boxed{2}$ ［**等比数列であることの証明**］ $a_n=3^n$，$b_n=5^n$ とするとき，$c_n=a_nb_n$ で定められる数列 $\{c_n\}$ は等比数列であることを証明しなさい。

考え方　$\{c_n\}$ が等比数列 $\Longleftrightarrow$ 任意の自然数 $n$ に対して $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=$ (定数)

解答　$c_n=a_nb_n \quad \cdots\cdots ①$

$n$ を $n+1$ に置き換えると，

$$c_{n+1}=a_{n+1}b_{n+1} \quad \cdots\cdots ②$$

② ÷ ① より，

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\frac{3^{n+1}\cdot 5^{n+1}}{3^n\cdot 5^n}=\frac{15^{n+1}}{15^n}=15$$

これは $n$ に関係ない定数である。

よって，数列 $\{c_n\}$ は等比数列である。　… 終

# 数学B　数列　No.2

名前

$\boxed{1}$ ［$\Sigma$ **の公式の証明**］ 平方数 $n^2$ は，1 から連続する $n$ 個の奇数の和として表せる。

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1+3$$
$$3^2 = 1+3+5$$
$$\cdots$$
$$n^2 = 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$$

これらの辺々を合計すると，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 = 1\cdot n+3\cdot(n-1)+5\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 1$$

これを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を証明しなさい。ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ は既知としてよい。

# 数学B　数列　No.2

解答

1 ［$\Sigma$ の公式の証明］平方数 $n^2$ は，1 から連続する $n$ 個の奇数の和として表せる。

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1+3$$
$$3^2 = 1+3+5$$
$$\cdots$$
$$n^2 = 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)$$

これらの辺々を合計すると，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 = 1\cdot n+3\cdot(n-1)+5\cdot(n-2)+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot 1 \quad \cdots\cdots \spadesuit$$

これを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を証明しなさい。ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ は既知としてよい。

解答 ♠ を $\Sigma$ を使って表すと，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(n+1-k)$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = -2\sum_{k=1}^{n} k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n}(n+1)$$ ← 右辺にも $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ が現れる
$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (2n+3)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n(n+1)$$ ← $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ を左辺に移行してまとめた
$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots \boxed{終}$$

# 数学 B　数列　No.3

名前

$\boxed{1}$ ［**3 項間漸化式**］ 漸化式 $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ をフィボナッチ数列という。

(1) 下の表の空欄をうめて，$a_{10}$ までの値を求めなさい。

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 1 | | | | | | | | | $\cdots$ |

(2) 一般項 $a_n$ を求めなさい。

# 数学 B　数列　No.3

解答

1 ［**3 項間漸化式**］漸化式 $a_1 = 1$，$a_2 = 1$，$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ をフィボナッチ数列という。

(1)　下の表の空欄をうめて，$a_{10}$ までの値を求めなさい。

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | $\cdots$ |

(2)　一般項 $a_n$ を求めなさい。

考え方 3 項間漸化式の解法をそのまま適用すればよい。ただし，特性方程式の解が $\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ となって煩雑なので，それを何度も書くのが面倒であれば，$\alpha$，$\beta$ で代用するとよい。

解答 $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$　$\cdots\cdots$ ①

特性方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ を解くと，解は $x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，① は次の 2 通りに変形できる。

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \quad \cdots\cdots ②$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \quad \cdots\cdots ③$$

② より，

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \alpha a_n &= (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot 1\right)\beta^{n-1} \\ &= \frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\beta^{n-1} \\ &= \beta^n \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

③ も同様にすると，

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^n \quad \cdots\cdots ⑤$$

④ − ⑤ より，

$$(\beta - \alpha)a_n = \beta^n - \alpha^n$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n - \alpha^n) \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}} \quad \cdots \boxed{答} \end{aligned}$$

すべての項が整数なのに，一般項の表現に無理数を使うのは意外性があって面白い。

# 数学B 確率・統計 No.1

名前

$\boxed{1}$ ［**ベルヌーイ分布**］ジョーカーを除く 52 枚のトランプがある。この中からカードを同時に 2 枚引き，2 枚ともスペードであれば $X=1$ とし，そうでなければ $X=0$ とする。

(1) $X$ の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

(2) 引いた 2 枚のカードがともにスペードであれば 900 円，そうでなければ 50 円を賞金としてもらえるとする。この試行を 1 回行ったとき，もらえる賞金を $Y$ 円として，$Y$ の平均と標準偏差を求めなさい。

# 数学B　確率・統計　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**ベルヌーイ分布**］ジョーカーを除く 52 枚のトランプがある。この中からカードを同時に 2 枚引き，2 枚ともスペードであれば $X=1$ とし，そうでなければ $X=0$ とする。

(1)　$X$ の平均，分散，標準偏差を求めなさい。

| $X$ | 1 | 0 | 計 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{17}$ | $\frac{16}{17}$ | 1 |

解答　2 枚ともスペードである確率は，

$$P(X=1)=\frac{{}_{13}C_2}{{}_{52}C_2}=\frac{13\cdot 12}{52\cdot 51}=\frac{1}{17}$$

$X$ はベルヌーイ分布 $B\left(1,\ \frac{1}{17}\right)$ に従う。　←二項分布といってもよい

$p=\frac{1}{17}$，$q=1-p=\frac{16}{17}$ とすると，

$$E(X)=p=\mathbf{\frac{1}{17}}\quad\cdots\boxed{答}$$

$$V(X)=pq=\frac{1}{17}\cdot\frac{16}{17}=\mathbf{\frac{16}{289}}\quad\cdots\boxed{答}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{pq}=\sqrt{\frac{1}{17}\cdot\frac{16}{17}}=\mathbf{\frac{4}{17}}\quad\cdots\boxed{答}$$

(2)　引いた 2 枚のカードがともにスペードであれば 900 円，そうでなければ 50 円を賞金としてもらえるとする。この試行を 1 回行ったとき，もらえる賞金を $Y$ 円として，$Y$ の平均と標準偏差を求めなさい。

解答　(1) の $X$ を用いて，$Y=850X+50$ と表せる。　←2 点 (1, 900)，(0, 50) を通る直線の式

$$\begin{aligned}E(Y)&=E(850X+50)\\&=850E(X)+50 &&\leftarrow E(aX+b)=aE(X)+b\\&=850\times\frac{1}{17}+50\\&=\mathbf{100\ (円)}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sigma(850X+50)\\&=|850|\sigma(X) &&\leftarrow \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)\\&=850\times\frac{4}{17}\\&=\mathbf{200\ (円)}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

別解　定義に従って求めると，

$$\begin{aligned}E(Y)&=900\cdot\frac{1}{17}+50\cdot\frac{16}{17}\\&=\frac{900+800}{17}\\&=\mathbf{100\ (円)}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(Y)&=(900-100)^2\cdot\frac{1}{17}+(50-100)^2\cdot\frac{16}{17}\\&=\frac{640000+40000}{17}\\&=40000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(Y)&=\sqrt{40000}\\&=\mathbf{200\ (円)}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

# 数学B　確率・統計　No.2

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**二項分布の正規分布による近似**］1 個のさいころを 450 回投げるとき，5 以上の目が 135 回以上 170 回以下出る確率を求めなさい。

$\boxed{2}$ ［**二項分布の正規分布による近似**］ある国の国民の血液型の割合は，O 型 30％，A 型 35％，B 型 25％，AB 型 10％ であると言われている。いま，400 人を無作為に選んだとき，AB 型の人が 46 人以上となる確率を求めなさい。

# 数学B　確率・統計　No.2

解答

$\boxed{1}$ ［**二項分布の正規分布による近似**］1 個のさいころを 450 回投げるとき，5 以上の目が 135 回以上 170 回以下出る確率を求めなさい。

解答 5 以上の目が出る回数を $X$ とすると，$X$ は二項分布 $B\left(450,\ \dfrac{1}{3}\right)$ に従う。

$X$ の平均と標準偏差を求めると，

$$E(X)=450\times\frac{1}{3}=150$$

$$\sigma(X)=\sqrt{450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=10$$

$Z=\dfrac{X-150}{10}$ とおくと，$Z$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。　$\leftarrow n=450$ は大きいとみなす

$X=135$ のとき，$Z=-1.5$

$X=170$ のとき，$Z=2$

よって，求める確率は，

$$\begin{aligned}P(135\leqq X\leqq 170)&=P(-1.5\leqq Z\leqq 2)\\&=P(0\leqq Z\leqq 1.5)+P(0\leqq Z\leqq 2)\\&=0.4332+0.4772\\&=\mathbf{0.9104}\quad\cdots\ \boxed{答}\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ ［**二項分布の正規分布による近似**］ある国の国民の血液型の割合は，O 型 30％，A 型 35％，B 型 25％，AB 型 10％ であると言われている。いま，400 人を無作為に選んだとき，AB 型の人が 46 人以上となる確率を求めなさい。

解答 AB 型の人数を $X$ とすると，$X$ は二項分布 $B(400,\ 0.1)$ に従う。

$X$ の平均と標準偏差を求めると，

$$E(X)=400\times0.1=40$$

$$\sigma(X)=\sqrt{400\times0.1\times0.9}=6$$

$Z=\dfrac{X-40}{6}$ とおくと，$Z$ は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。　$\leftarrow n=400$ は大きいとみなす

$X\geqq 46\iff Z\geqq 1$ より，

求める確率は，

$$\begin{aligned}P(X\geqq 46)&=P(Z\geqq 1)\\&=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1)\\&=0.5-0.3413\\&=\mathbf{0.1587}\quad\cdots\ \boxed{答}\end{aligned}$$

# 数学B　確率・統計　No.3

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**標本平均と母数の関係**］ 箱の中に 5 と書かれたカード 1 枚と，1 と書かれたカード 3 枚が入っている。これを母集団として，大きさ 2 の標本を復元抽出するとき，カードに書かれた数を変量 $X_1$，$X_2$ とする。

(1) 母平均 $m$，母分散 $\sigma^2$ を求めなさい。

(2) 標本平均 $\overline{X}$ の確率分布を求めなさい。

(3) 以上の結果を使って，標本平均と母数の関係 $E(\overline{X}) = m$，$V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ が成り立っていることを確認しなさい。

# 数学B 確率・統計 No.3

解答

1 ［**標本平均と母数の関係**］箱の中に 5 と書かれたカード 1 枚と，1 と書かれたカード 3 枚が入っている。これを母集団として，大きさ 2 の標本を復元抽出するとき，カードに書かれた数を変量 $X_1$，$X_2$ とする。

(1) 母平均 $m$，母分散 $\sigma^2$ を求めなさい。

解答 母集団から 1 枚のカードを無作為抽出し，書かれた数を $X$ とするとき，$X$ の確率分布は右の表のようになる。

| $X$ | 5 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |

$$m = E(X) = 5\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{2} \quad \cdots \boxed{答}$$

$$\sigma^2 = V(X) = (5-2)^2\cdot\frac{1}{4} + (1-2)^2\cdot\frac{3}{4} = \mathbf{3} \quad \cdots \boxed{答}$$

別解 $E(X^2) = 5^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\cdot\frac{3}{4} = 7$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 7 - 2^2 = \mathbf{3} \quad \cdots \boxed{答}$$

(2) 標本平均 $\overline{X}$ の確率分布を求めなさい。

解答 $X_1$，$X_2$ の同時分布は，

| $X_1$ \ $X_2$ | 5 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| 5 | ⑤ $\frac{1}{16}$ | ③ $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ |
| 1 | ③ $\frac{3}{16}$ | ① $\frac{9}{16}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 計 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 |

← 丸付きの値は $\overline{X}$

よって，$\overline{X}$ の確率分布は，

| $\overline{X}$ | 5 | 3 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{6}{16}$ | $\frac{9}{16}$ | 1 |

$\cdots \boxed{答}$

(3) 以上の結果を使って，標本平均と母数の関係 $E(\overline{X}) = m$，$V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ が成り立っていることを確認しなさい。

解答 標本の大きさは 2 なので，$n = 2$

$$E(\overline{X}) = 5\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{6}{16} + 1\cdot\frac{9}{16} = \frac{5+18+9}{16} = 2 = m$$

$$V(\overline{X}) = (5-2)^2\cdot\frac{1}{16} + (3-2)^2\cdot\frac{6}{16} + (1-2)^2\cdot\frac{9}{16} = \frac{9+6+9}{16} = \frac{3}{2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

よって，確かめられた。 $\cdots \boxed{終}$

# 数学 B　確率・統計　No.4

名前 ____________________

$\boxed{1}$ ［**母平均の推定（標準偏差を求める）**］ある農園から出荷されるリンゴを無作為に 10 個を抽出して糖度を測ったところ，次のようになった。

13， 14， 14， 15， 15， 15， 15， 16， 16， 17 （単位は度）

リンゴの糖度は正規分布に従うものとして，この農園から出荷されるリンゴの糖度を信頼度 95％ で推定しなさい。ただし，$\sqrt{3} = 1.73$ とし，答えの数値は小数第 2 位までの概数にしなさい。

# 数学B　確率・統計　No.4

解答

1 ［**母平均の推定（標準偏差を求める）**］ある農園から出荷されるリンゴを無作為に10個を抽出して糖度を測ったところ，次のようになった。

13，14，14，15，15，15，15，16，16，17　（単位は度）

リンゴの糖度は正規分布に従うものとして，この農園から出荷されるリンゴの糖度を信頼度95％で推定しなさい。ただし，$\sqrt{3}=1.73$ とし，答えの数値は小数第2位までの概数にしなさい。

解答　標本の大きさは，$n=10$

標本平均は，

$$\overline{X}=\frac{1}{10}(13+14\cdot2+15\cdot4+16\cdot2+17)$$
$$=\frac{13+28+60+32+17}{10}=\frac{150}{10}=15$$

標本分散は，

$$s^2=\frac{1}{10}\{(13-15)^2+(14-15)^2\cdot2+(15-15)^2\cdot4+(16-15)^2\cdot2+(17-15)^2\}$$
$$=\frac{4+2+0+2+4}{10}=\frac{12}{10}=1.2$$

標本の標準偏差は，

$$s=\sqrt{s^2}$$
$$=\sqrt{1.2}$$　← これを母標準偏差 $\sigma$ の代わりに使う

信頼区間の半径は，

$$r=1.96\cdot\frac{s}{\sqrt{n}}=1.96\cdot\frac{\sqrt{1.2}}{\sqrt{10}}=\frac{1.96\times2\sqrt{3}}{10}=\frac{1.96\times2\times1.73}{10}=0.67816\fallingdotseq0.68$$

これらを，$[\overline{X}-r,\ \overline{X}+r]$ に代入すると，

$$[15-0.68,\ 15+0.68]$$
$$=[14.32,\ 15.68]$$

よって，求める信頼区間は，

**［14.32，15.68］（度）** … 答