数学 A　場合の数　No.1

名前

$\boxed{1}$ ［**集合の要素の数**］3 つの集合 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{11,\ 13,\ 17\}$，$C=\{19,\ 23\}$ がある。このとき，次の集合の要素の個数を求めなさい。

(1) $\{ab \mid a\in A,\ b\in B\}$

(2) $\{abc \mid a\in A,\ b\in B,\ b\in C\}$

(3) $\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$

(4) $\{a+b+c \mid a\in A,\ b\in B,\ b\in C\}$

数学 A　場合の数　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**集合の要素の数**］3 つの集合 $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$，$B=\{11,\ 13,\ 17\}$，$C=\{19,\ 23\}$ がある。このとき，次の集合の要素の個数を求めなさい。

(1)　$\{ab \mid a\in A,\ \ b\in B\}$

解答　$4\times3=12$ 通りのかけ算がある。
a，b は素数なので，
それらの積の中に重複する値はない。
よって，要素の個数は **12 個**　… 答

(2)　$\{abc \mid a\in A,\ \ b\in B,\ \ b\in C\}$

解答　$4\times3\times2=24$ 通りのかけ算がある。
a，b，c は素数なので，
それらの積の中に重複する値はない。
よって，要素の個数は **24 個**　… 答

(3)　$\{a+b \mid a\in A,\ \ b\in B\}$

解答　$4\times3=12$ 通りのたし算がある。

	2	3	5	7
11	13	14	16	18
13	15	16	18	20
17	19	20	22	24

重複を取り除くと，
$\{13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 19,\ 20,\ 22,\ 24\}$
よって，要素の個数は **9 個**　… 答

(4)　$\{a+b+c \mid a\in A,\ \ b\in B,\ \ b\in C\}$

解答　(3) の集合を S とすると，この集合は，
$\{s+c \mid s\in S,\ c\in C\}$
であり，$s+c$ のたし算は $9\times2=18$ 通り。

	13	14	15	16	18	19	20	22	24
19					ア	イ	ウ	エ	オ
23		ア	イ	ウ	エ		オ		

S の要素のうち，差が 4 である組に注目すると，
18 通り中，和が重複するのはア～オの 5 つ。
よって，要素の個数は $18-5=$ **13 個**　… 答

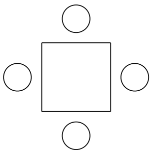
数学 A　場合の数　No.2

名前

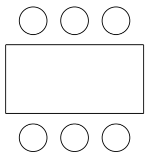
$\boxed{1}$ ［**円順列**］6 人の生徒 A，B，C，D，E，F について，次の問いに答えなさい。

(1)　6 人から 4 人を選んで 1 列に並べる方法は全部で何通りあるか。

(2)　6 人から 4 人が選ばれて，右の図のような正方形のテーブルのまわりの 4 つの席につく方法は全部で何通りあるか。



(3)　6 人が右の図のような長方形のテーブルのまわりの 6 つの席につく方法は全部で何通りあるか。



数学 A　場合の数　No.2

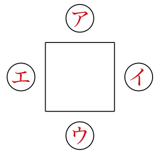
解答

1　［円順列］6 人の生徒 A，B，C，D，E，F について，次の問いに答えなさい。

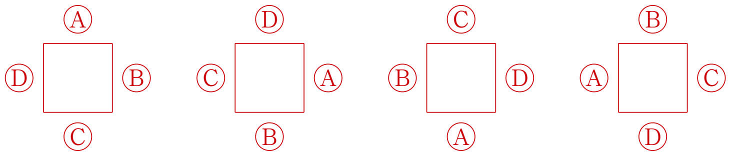
(1)　6 人から 4 人を選んで 1 列に並べる方法は全部で何通りあるか。

解答　${}_6\mathrm{P}_4 = \mathbf{360}$ **通り**　… 答

(2)　6 人から 4 人が選ばれて，右の図のような正方形のテーブルのまわりの 4 つの席につく方法は全部で何通りあるか。

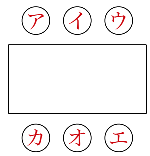


解答　4 つの席にア，イ，ウ，エと名前をつけて区別する。
その 4 つの席に 6 人から 4 人を選んで割り当てる方法は ${}_6\mathrm{P}_4$ 通りある。
この ${}_6\mathrm{P}_4$ 通りに含まれる次の 4 通りは，90° ずつ回転すると一致するので，同じものとみなせる。

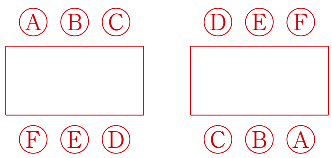


よって，重複度は 4 なので，求める順列は，$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_4}{4} = \dfrac{360}{4} = \mathbf{90}$ **通り**　… 答

(3)　6 人が右の図のような長方形のテーブルのまわりの 6 つの席につく方法は全部で何通りあるか。



解答　6 つの席にア，イ，ウ，エ，オ，カと名前をつけて区別する。
その 6 つの席に A，B，C，D，E，F を割り当てる方法は 6! 通りある。
この 6! 通りに含まれる次の 2 通りは，180° 回転すると一致するので，同じものとみなせる。



よって，重複度は 2 なので，求める順列は，$\dfrac{6!}{2} = \dfrac{720}{2} = \mathbf{360}$ **通り**　… 答

数学 A　確率　No.1

名前

$\boxed{1}$ ［**終了条件のある問題**］2 人のプレイヤー A と B が対戦するゲームがある。1 戦あたり，A が勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$，B が勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$ であり，引き分けはない。A，B がくり返し試合をし，先に 4 勝した方を優勝とする。このとき，次の確率を求めなさい。

(1) 4 戦目で A が優勝する確率

(2) 5 戦目で A が優勝する確率

(3) A が優勝する確率

数学 A　確率　No.1

解答

[1] ［**終了条件のある問題**］2 人のプレイヤー A と B が対戦するゲームがある。1 戦あたり，A が勝つ確率は $\frac{1}{3}$，B が勝つ確率は $\frac{2}{3}$ であり，引き分けはない。A，B がくり返し試合をし，先に 4 勝した方を優勝とする。このとき，次の確率を求めなさい。

(1)　4 戦目で A が優勝する確率

解答　A が 4 戦全勝する確率を求める。

$\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \mathbf{\frac{1}{81}}$　… 答

(2)　5 戦目で A が優勝する確率

解答　4 戦目までに A が 3 勝 1 敗となり，かつ，5 戦目で A が勝つ確率を求める。

${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{8}{243}}$　… 答

(3)　A が優勝する確率

解答　優勝するのは，4 戦目，5 戦目，6 戦目，7 戦目のどれかである。4 戦目と 5 戦目で優勝する確率はすでに (1)，(2) で求めたので，あとは 6 戦目と 7 戦目で優勝する確率を求めればよい。

［1］ 6 戦目で A が優勝する確率

5 戦目までに A が 3 勝 2 敗となり，かつ，6 戦目で A が勝つ確率を求めればよいので，

${}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{40}{729}$

［2］ 7 戦目で A が優勝する確率

6 戦目までに A が 3 勝 3 敗となり，かつ，7 戦目で A が勝つ確率を求めればよいので，

${}_6C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{160}{2187}$

よって，A が優勝する確率は，

$$\frac{1}{81} + \frac{8}{243} + \frac{40}{729} + \frac{160}{2187}$$
$$= \frac{27+72+120+160}{2187}$$
$$= \mathbf{\frac{379}{2187}} \quad \cdots \text{答}$$

参考　先に n 勝した方を優勝とすると，A が優勝する確率 p_n は次のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{17}{81}$	$\frac{379}{2187}$	$\frac{2851}{19683}$	$\frac{89}{729}$	$\frac{55025}{531441}$
およそ	0.33	0.26	0.21	0.17	0.14	0.12	0.10

n が大きいほど，弱い者が不利，強い者が有利となる。直感的にも何となく分かる。

数学 A　確率　No.2

名前 ______________________

$\boxed{1}$［**原因の確率**］あるウイルス検査法では，感染者が陽性を示す確率は 97％，非感染者が陰性を示す確率は 98％ である。つまり，感染者でも 3％ の確率で誤って陰性と判定され，非感染者でも 2％ の確率で誤って陽性と判定される。ある国の国民のうち 1％ がウイルス感染者であるとして，次の問いに答えなさい。

(1) 国民 1 人をこの検査法で検査するとき，陽性と判定される確率を求めなさい。

(2) 国民 1 人をこの検査法で検査したところ陽性と判定された。この人が実際に感染者である確率を求めなさい。

数学 A　確率　No.2

解答

1 ［**原因の確率**］あるウイルス検査法では，感染者が陽性を示す確率は 97％，非感染者が陰性を示す確率は 98％ である。つまり，感染者でも 3％ の確率で誤って陰性と判定され，非感染者でも 2％ の確率で誤って陽性と判定される。ある国の国民のうち 1％ がウイルス感染者であるとして，次の問いに答えなさい。

(1)　国民 1 人をこの検査法で検査するとき，陽性と判定される確率を求めなさい。

解答　感染者であるという事象を A，陽性と判定される事象を B とする。

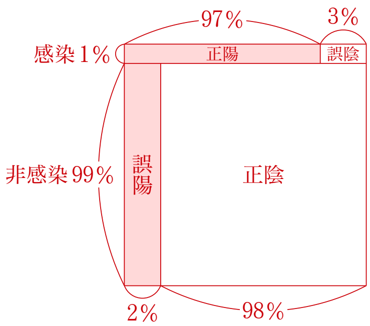
$$\begin{aligned}P(B) &= P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)\\ &= 0.01\times 0.97+0.99\times 0.02\\ &= 0.0097+0.0198\\ &= 0.0295\\ &= \mathbf{2.95\%}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

分数で答えるなら，$\mathbf{\dfrac{59}{2000}}$　$\cdots\boxed{答}$

(2)　国民 1 人をこの検査法で検査したところ陽性と判定された。この人が実際に感染者である確率を求めなさい。

解答　感染者であるという事象を A，陽性と判定される事象を B とする。求める確率は $P_B(A)$ である。

$$\begin{aligned}P_B(A) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\\ &= \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}\\ &= \frac{0.01\times 0.97}{0.01\times 0.97+0.99\times 0.02}\\ &= \frac{1\times 97}{1\times 97+99\times 2}\\ &= \frac{97}{97+198}\\ &= \mathbf{\frac{97}{295}}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$



求めるのは図の赤く塗った部分に占める「正陽」の面積の割合である。

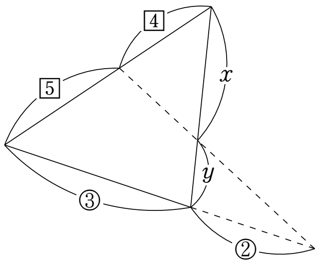
参考　検査の正確さが 97％ や 98％ と高い中で，陽性と判定されても本当に感染している確率が約 33％ というのは意外に低く感じる。これは，実際のウイルス感染者が 1％ しかいないことが原因で，仮にそれが 50％ ならば，陽性と判断されたときに感染者である確率は $\dfrac{97}{99}\fallingdotseq 98\%$ となり，検査の正確さに見合った確率になる。

数学 A　図形の性質　No.1

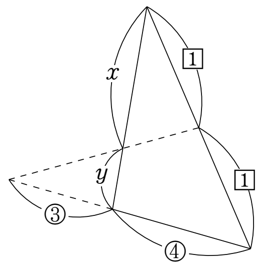
名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 ［**メネラウスの定理**］次の図について，線分の長さの比 $x:y$ を求めなさい。

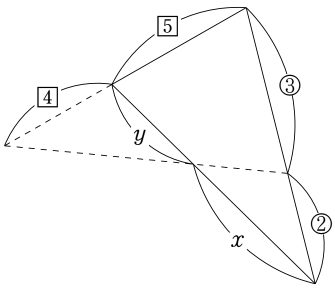
(1)



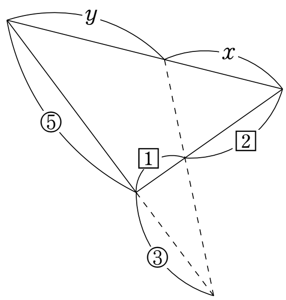
(2)



(3)

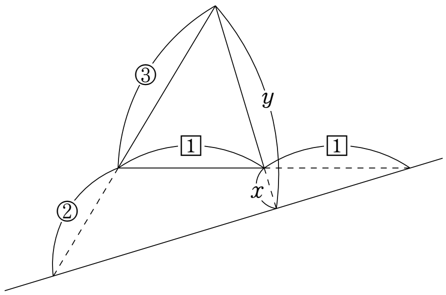


(4)

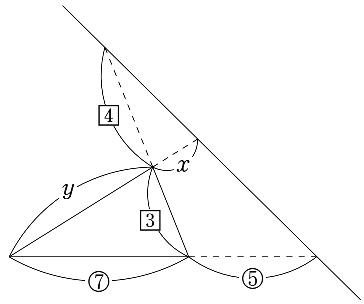


2 ［**メネラウスの定理（変則型）**］次の図について，線分の長さの比 $x:y$ を求めなさい。

(1)



(2)



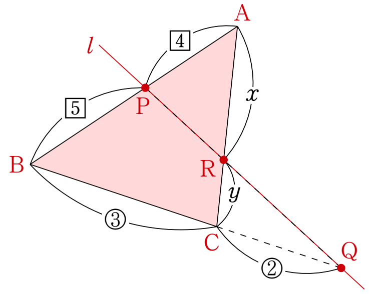
数学 A　図形の性質　No.1

解答

1 ［**メネラウスの定理**］次の図について，線分の長さの比 $x:y$ を求めなさい。

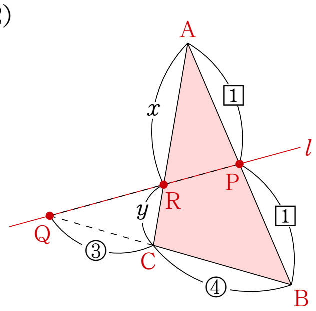
定理 △ABC において，AB，BC，CA と直線 l の交点をそれぞれ P，Q，R とすると，$\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\dfrac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{RA}}{\mathrm{CR}}=1$ が成り立つ。これを**メネラウスの定理**という。

(1)



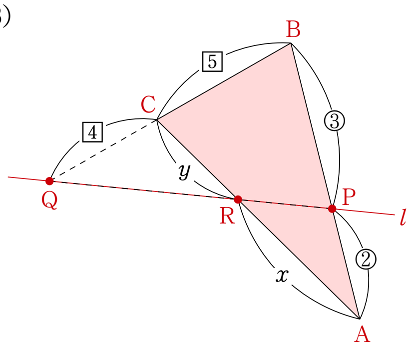
$\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{x}{y}=1$ より，$\boldsymbol{x:y=2:1}$ … 答

(2)



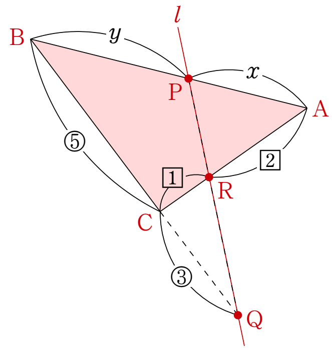
$\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{x}{y}=1$ より，$\boldsymbol{x:y=7:3}$ … 答

(3)



$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{x}{y}=1$ より，$\boldsymbol{x:y=3:2}$ … 答

(4)

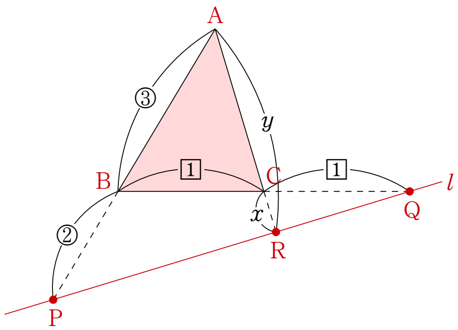


$\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{2}{1}=1$ より，$\boldsymbol{x:y=3:4}$ … 答

2 ［**メネラウスの定理（変則型）**］次の図について，線分の長さの比 $x:y$ を求めなさい。

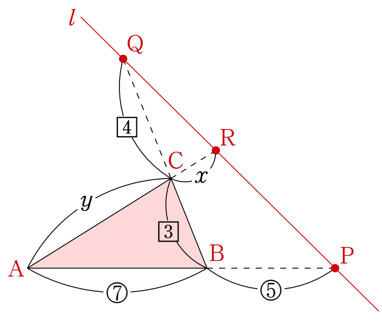
定理 メネラウスの定理の $\dfrac{\mathrm{PB}}{\mathrm{AP}}\cdot\dfrac{\mathrm{QC}}{\mathrm{BQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{RA}}{\mathrm{CR}}=1$ は，直線 l が △ABC の外部を通っていても成り立つ。

(1)



$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{x}=1$ より，$\boldsymbol{x:y=1:5}$ … 答

(2)



$\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{x+y}{x}=1$ より，$x:(x+y)=5:21$

$\boldsymbol{x:y=5:16}$ … 答

数学 A　図形の性質　No.2

名前

$\boxed{1}$ ［**外接する 2 つの円**］ 点 A を中心とする半径 2 の円 O と点 B を中心とする半径 3 の円 O′ が点 C で外接している。点 D は円 O 上に，また点 E は円 O′ 上にあり，直線 DE は 2 つの円の共通接線となっている。

このとき，

$$\mathrm{DE} = \boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

であり，点 C における 2 つの円の共通接線と直線 DE との交点を F とすると，

$$\mathrm{CF} = \sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

である。

また，三角形の相似に注目すると，

$$\mathrm{CD} : \mathrm{CE} = 2 : \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

であることが分かるので，

$$\mathrm{CD} = \frac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

［解答時間 7 分］

数学 A　図形の性質　No.2

解答

1 ［**外接する2つの円**］点 A を中心とする半径 2 の円 O と点 B を中心とする半径 3 の円 O′ が点 C で外接している。点 D は円 O 上に，また点 E は円 O′ 上にあり，直線 DE は 2 つの円の共通接線となっている。

このとき，

$$\mathrm{DE} = \boxed{ア\ 2}\sqrt{\boxed{イ\ 6}}$$

であり，点 C における 2 つの円の共通接線と直線 DE との交点を F とすると，

$$\mathrm{CF} = \sqrt{\boxed{ウ\ 6}}$$

である。

また，三角形の相似に注目すると，　← この 2 行から，CD : CE を相似比とする三角形があると読み取ろう。

$$\mathrm{CD} : \mathrm{CE} = 2 : \sqrt{\boxed{エ\ 6}}$$

であることが分かるので，

$$\mathrm{CD} = \frac{\boxed{オ\ 4}\sqrt{\boxed{カキ\ 15}}}{\boxed{ク\ 5}}$$

である。

［解答時間 7 分］

解答 図 1 のように，点 A から BE に垂線 AH をひく。

△ABH に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{AH} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\mathrm{DE} = \mathbf{2\sqrt{6}} \quad \cdots 答$$

［図 1］

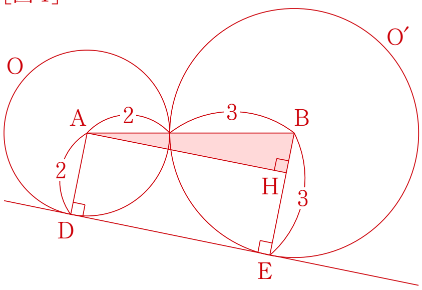


図 2 において，FC = FD = FE より，

$$\mathrm{CF} = \frac{\mathrm{DE}}{2} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \mathbf{\sqrt{6}} \quad \cdots 答$$

$\angle \mathrm{ADF} = 90°$，$\angle \mathrm{ACF} = 90°$ より，

四角形 ADFC は円に内接するので，

$$\angle \mathrm{CAD} = \angle \mathrm{CFE}$$

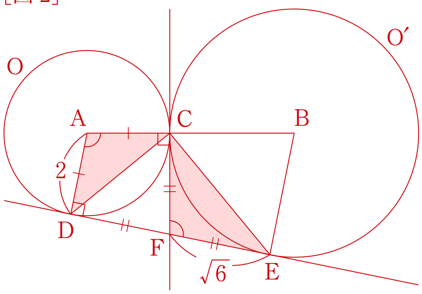
さらに AD = AC，FE = FC より，

$$\triangle \mathrm{CAD} \backsim \triangle \mathrm{CFE}$$

相似比 AD : FE = 2 : $\sqrt{6}$ より，

$$\mathrm{CD} : \mathrm{CE} = 2 : \mathbf{\sqrt{6}} \quad \cdots 答$$

［図 2］



$\mathrm{CD} = 2k$，$\mathrm{CE} = \sqrt{6}k$ $(k > 0)$ とおく。

点 C は線分 DE を直径とする円の周上にあるので，

$$\angle \mathrm{DCE} = 90°$$

△DCE に三平方の定理を用いて，

$$\mathrm{CD}^2 + \mathrm{CE}^2 = \mathrm{DE}^2$$

$$(2k)^2 + (\sqrt{6}k)^2 = (2\sqrt{6})^2$$

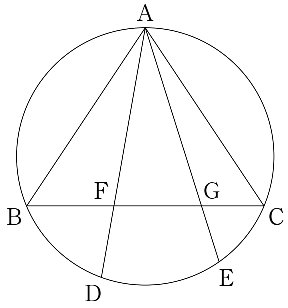
これを解くと，$k = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}$ なので，

$$\mathrm{CD} = 2 \times \frac{2\sqrt{15}}{5} = \mathbf{\frac{4\sqrt{15}}{5}} \quad \cdots 答$$

参考 FC = FD = FE = $\sqrt{6}$ は，2 つの円の半径 2，3 の相乗平均である。また，面積比 △DAC : △CFE は，2 つの円の半径の比 2 : 3 に等しい。さらに，$\angle \mathrm{AFB} = 90°$，△ACF ∽ △FCB が成り立っていることもおさえておこう。

数学 A　図形の性質　No.3

名前



$\boxed{1}$ ［**方べきの定理の逆**］ $AB = AC$ である二等辺三角形 ABC とその外接円がある。この外接円の弧 BC（A を含まない方）上に 2 点 D，E をとり，弦 AD，AE と辺 BC との交点をそれぞれ F，G とする。このとき，次のことを証明しなさい。

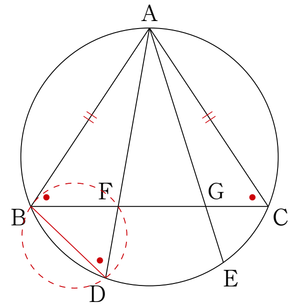
(1) $AB^2 = AD \cdot AF$

(2) 4 点 D，E，F，G は同一円周上にある。

数学 A　図形の性質　No.3

解答

1 ［方べきの定理の逆］AB ＝ AC である二等辺三角形 ABC とその外接円がある。この外接円の弧 BC (A を含まない方) 上に 2 点 D，E をとり，弦 AD，AE と辺 BC との交点をそれぞれ F，G とする。このとき，次のことを証明しなさい。



(1)　$AB^2 = AD \cdot AF$

解答　AB ＝ AC より，

$\angle ABC = \angle ACB$ …… ①

$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角より，

$\angle ACB = \angle ADB$ …… ②

①，② より，

$\angle ABC = \angle ADB$

接弦定理の逆より，△BDF の外接円は点 B で直線 AB に接する。

よって，方べきの定理より，

$AB^2 = AD \cdot AF$　… 終

別解（三角形の相似を使う）

△ABF と △ADB において，

上の解答より，$\angle ABF = \angle ADB$

$\angle A$ は共通

2 組の角がそれぞれ等しいので，$\triangle ABF \backsim \triangle ADB$

よって，$AB : AD = AF : AB$

すなわち，$AB^2 = AD \cdot AF$　… 終

(2)　4 点 D，E，F，G は同一円周上にある。

解答　(1) の結果より，

$AB^2 = AD \cdot AF$ …… ①

同様にして，

$AC^2 = AE \cdot AG$ …… ②

①，②，および，AB ＝ AC より，

$AD \cdot AF = AE \cdot AG$

方べきの定理の逆より，4 点 D，E，F，G は同一円周上にある。　… 終

別解（内接四角形の定理の逆を使う）

$\angle ABC = \angle ACB = \angle AEB$　$(= \bullet)$

$\angle BAD = \angle BED$　$(= \circ)$

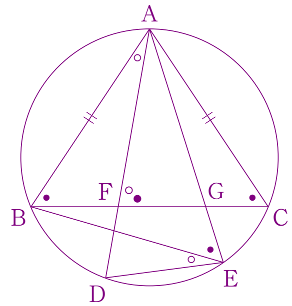
$\angle AFG = \angle ABF + \angle BAF$　$(= \bullet + \circ)$

$\angle AED = \angle AEB + \angle BED$　$(= \bullet + \circ)$

以上より，

$\angle AFG = \angle AED$

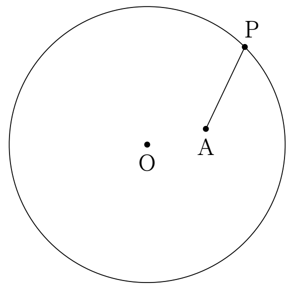
よって，4 点 D，E，F，G は同一円周上にある。　… 終



数学 A　図形の性質　No.4

名前

$\boxed{1}$ ［**三角形の辺の長さの関係**］円 O の内部に，点 O とは異なる点 A がある。この円周上を点 P が動くとき，線分 AP の長さが最小になるのは点 P がどの位置にあるときか。



三角形の辺の長さの関係

「三角形の 2 辺の長さの和は，残りの 1 辺の長さより大きい」

を利用して答えなさい。

数学 A　図形の性質　No.4

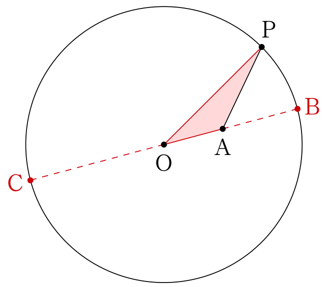
解答

1 ［**三角形の辺の長さの関係**］円 O の内部に，点 O とは異なる点 A がある。この円周上を点 P が動くとき，線分 AP の長さが最小になるのは点 P がどの位置にあるときか。

三角形の辺の長さの関係

「三角形の 2 辺の長さの和は，残りの 1 辺の長さより大きい」

を利用して答えなさい。



解答 直線 OA と円周の交点を B，C（AB ＜ AC）とする。

（i） 点 P が B，C と異なる位置にあるとき

△OAP をつくることができる。三角形の辺の長さの関係より，

$$\mathrm{OA}+\mathrm{AP}>\mathrm{OP} \quad \cdots\cdots ①$$

また，OP と OB は円 O の半径であることから，

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}&=\mathrm{OB}\\&=\mathrm{OA}+\mathrm{AB} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

② を ① に代入すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA}+\mathrm{AP}&>\mathrm{OA}+\mathrm{AB}\\\mathrm{AP}&>\mathrm{AB}\end{aligned}$$

(ii) 点 P が B の位置にあるときは，AP ＝ AB

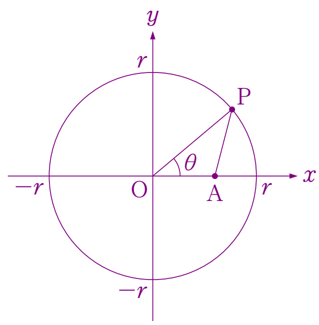
(iii) 点 P が C の位置にあるときは，AP ＞ AB

（i）～(iii) より，AP が最小となるのは，点 P が B の位置にあるときである。 … 答

別解 解き方の指定が無ければ，座標平面での 2 点間の距離や，余弦定理を利用する方法もある。

原点を中心とする半径 r の円，定点 A$(a,\ 0)$（ただし $0<a<r$），円周上を動く点 P$(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$（ただし $0\leqq\theta<2\pi$）をとる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=(a-r\cos\theta)^2+r\sin^2\theta\\&=a^2-2ar\cos\theta+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\\&=a^2-2ar\cos\theta+r^2 \quad \cdots\cdots ♠\end{aligned}$$



a，r を定数とすると，これは $\cos\theta$ についての 1 次関数であり，その係数は $-2ar<0$ なので，♠ が最小となるのは $\cos\theta$ が最大のとき，すなわち $\theta=0$ のときである。

よって，AP が最小となるのは，P$(r,\ 0)$ のときである。 … 終

この証明で，a の条件 $0<a<r$ のうち $a>0$ は使ったが，$a<r$ は使っていないので，点 A が円の外部にあっても結論は変わらないことが分かる。また，♠ の式は余弦定理から導いてもよい。