数学3 関数 No.1

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**合成について可換な関数**］ x についての1次関数 $f(x)$ と2次関数 $g(x)$ について，$g \circ f = f \circ g$ が成り立つための $f(x)$ と $g(x)$ の条件を求めなさい。

数学3　関数　No.1

解答

1 ［**合成について可換な関数**］x についての1次関数 $f(x)$ と2次関数 $g(x)$ について，$g\circ f=f\circ g$ が成り立つための $f(x)$ と $g(x)$ の条件を求めなさい。

解答 $f(x)=ax+b$，$g(x)=cx^2+dx+e$ とおく。（$a\neq 0$，$c\neq 0$）

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x)&=c(ax+b)^2+d(ax+b)+e\\&=a^2cx^2+2abcx+b^2c+adx+bd+e\\&=a^2cx^2+(2abc+ad)x+b^2c+bd+e\ \cdots\cdots ①\\(f\circ g)(x)&=a(cx^2+dx+e)+b\\&=acx^2+adx+ae+b\ \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

$g\circ f=f\circ g\iff$ ①＝② が x についての恒等式

$$\iff\begin{cases}a^2c=ac & \cdots\cdots[1]\\2abc+ad=ad & \cdots\cdots[2]\\b^2c+bd+e=ae+b & \cdots\cdots[3]\end{cases}$$

[1] について

$$\begin{aligned}a^2c=ac&\iff ac(a-1)=0\\&\iff a-1=0\qquad(a\neq 0,\ c\neq 0\text{ より})\\&\iff a=1\ \cdots\cdots\ \spadesuit\end{aligned}$$

[2] について

$$\begin{aligned}2abc+ad=ad&\iff 2abc=0\\&\iff b=0\ \cdots\cdots\ \clubsuit\qquad(a\neq 0,\ c\neq 0\text{ より})\end{aligned}$$

[3] について

$\spadesuit$，$\clubsuit$ の条件のもとで，

（左辺）$=b^2c+bd+e=e$

（右辺）$=ae+b=e$

となるので，[3] は成り立つ。

以上より，[1] かつ [2] かつ [3] $\iff$ $a=1$ かつ $b=0$

よって，$g\circ f=f\circ g$ となるための必要十分条件は，$a=1$ かつ $b=0$，すなわち，$f(x)=x$ である。$g(x)$ は任意である。　… 終

数学3　極限　No.1

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**はさみうちの原理の利用**］ $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ であることを，次の手順にしたがって示しなさい。

(1) $n > 1$ のとき，$\sqrt[n]{n} > 1$ を示しなさい。

(2) $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$ とおくとき，$n > \dfrac{n(n-1)}{2} {a_n}^2$ を示しなさい。

(3) $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ を示しなさい。

数学3　極限　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［はさみうちの原理の利用］ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ であることを，次の手順にしたがって示しなさい。

(1)　$n>1$ のとき，$\sqrt[n]{n}>1$ を示しなさい。

解答　両辺の n 乗をそれぞれ求めると，

$$(\text{左辺})^n=\left(\sqrt[n]{n}\right)^n=\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^n=n$$

$$(\text{右辺})^n=1^n=1$$

よって，$n>1$ のとき，$(\text{左辺})^n>(\text{右辺})^n$

両辺は正なので，$(\text{左辺})>(\text{右辺})$

すなわち，$\sqrt[n]{n}>1$　… 終

(2)　$\sqrt[n]{n}=1+a_n$ とおくとき，$n>\dfrac{n(n-1)}{2}{a_n}^2$ を示しなさい。

考え方　$\dfrac{n(n-1)}{2}{a_n}^2$ という式から二項定理を連想することができる。

解答　$\sqrt[n]{n}=1+a_n$ とおくと，(1) より $\sqrt[n]{n}>1$ なので，$a_n>0$

$\sqrt[n]{n}=1+a_n$ の両辺を n 乗すると，

$$n=(1+a_n)^n$$

$$={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1a_n+{}_n\mathrm{C}_2{a_n}^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_n{a_n}^n$$　← 二項定理を使って展開した

$a_n>0$ より，右辺の各項はすべて正なので，

$$n>{}_n\mathrm{C}_2{a_n}^2$$　← ${}_n\mathrm{C}_2{a_n}^2$ だけ残して他を消した

すなわち，

$$n>\frac{n(n-1)}{2}{a_n}^2$$　… 終

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ を示しなさい。

解答　(2) より，

$$0<\frac{n(n-1)}{2}{a_n}^2<n$$

$$0<{a_n}^2<\frac{2}{n-1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n-1}=0$ なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to\infty}{a_n}^2=0,\ \text{すなわち，}\lim_{x\to\infty}a_n=0$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(1+a_n)=1+0=1$$　… 終

数学3　関数の極限　No.1

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**極限値の存在条件**］$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{1}{2}$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい。

数学3　関数の極限　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［極限値の存在条件］ $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{1}{2}$ …… ① が成り立つように，定数 a，b の値を定めなさい。

解答 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}$ …… ②

$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき，(分母) $=\cos x\to 0$ なので，

② が極限値をもつためには，(分子) $=ax+b\to 0$ となる必要がある。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$$

$$a\cdot\frac{\pi}{2}+b=0$$

$$b=-\frac{\pi}{2}a \quad \cdots\cdots ③$$

このとき，

$$② = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax-\frac{\pi}{2}a}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos x} \quad \cdots\cdots ④$$

$t=\dfrac{\pi}{2}-x$ とおくと，$x\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $t\to 0$ なので，

$$④ = \lim_{t\to 0}\frac{-at}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(-a\cdot\frac{t}{\sin t}\right)$$

$$= -a$$

① より，$-a=\dfrac{1}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$ … $\boxed{答}$

③ に代入すると，$\boldsymbol{b=\dfrac{\pi}{4}}$ … $\boxed{答}$

数学 3　微分　No.1

名前 ______________________

$\boxed{1}$ ［**置き換えの利用**］関数 $y = \log \dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$ について，$t = \sqrt{e^x+1}$ による置き換えを利用して，導関数 y' を求めなさい。

数学3　微分　No.1

解答

1 ［**置き換えの利用**］関数 $y=\log\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$ について，$t=\sqrt{e^x+1}$ による置き換えを利用して，導関数 y' を求めなさい。

解答 $y=\log\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}=\log\dfrac{t-1}{t+1}$

両辺を t で微分すると，

$$\frac{dy}{dt}=\frac{t+1}{t-1}\cdot\left(\frac{t-1}{t+1}\right)'=\frac{t+1}{t-1}\cdot\frac{2}{(t+1)^2}=\frac{2}{t^2-1}=\frac{2}{e^x}\quad\cdots\cdots ①$$

$t=\sqrt{e^x+1}$ の両辺を x で微分すると，

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{e^x+1}}\cdot(e^x+1)'=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}\quad\cdots\cdots ②$$

よって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

← 合計関数の微分の公式

$$=\frac{2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

← ①，② より

$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}}\quad\cdots \text{答}$$

参考 もちろん，置き換えを使わずに微分することもできる。

$$y=\log\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$$

$$=\log(\sqrt{e^x+1}-1)-\log(\sqrt{e^x+1}+1)$$

$$y'=\frac{(\sqrt{e^x+1}-1)'}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{(\sqrt{e^x+1}+1)'}{\sqrt{e^x+1}+1}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{e^x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right)(\sqrt{e^x+1})'$$

$$=\frac{2}{e^x}(\sqrt{e^x+1})'$$

$$=\frac{2}{e^x}\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e^x+1}}}\quad\cdots \text{答}$$

数学3 微分 No.2

名前

$\boxed{1}$ ［**指数関数の微分**］$(a^x)' = a^x \log a$ を証明しなさい。ただし，対数関数の微分 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \log a}$ は使わず，導関数の定義 $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ を使って証明しなさい。

数学3　微分　No.2

解答

[1] ［**指数関数の微分**］$(a^x)' = a^x \log a$ を証明しなさい。ただし，対数関数の微分 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ は使わず，導関数の定義 $f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を使って証明しなさい。

考え方　$(a^x)'$ の結果には自然対数の $\log a$ が使われているので，導出過程のどこかで必ずネイピア数 e が現れるはずである。そこで，e の定義である $\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ を作るように式変形や置き換えを行う。

解答　$f(x) = a^x$ とおく。導関数の定義より，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\
&= a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}
\end{aligned}
$$

$a^h - 1 = t$ とおくと，$h = \log_a(1+t)$，$h \to 0$ のとき $t \to 0$ なので，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= a^x \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} \\
&= a^x \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)} \\
&= a^x \lim_{t\to 0}\frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}}
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ より，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= a^x \cdot \frac{1}{\log_a e} \\
&= a^x \log_e a \\
&= a^x \log a \quad \cdots \boxed{終}
\end{aligned}
$$

参考　対数関数の微分 $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\log a}$ を利用して証明する方法

［1］（対数微分法）

$a^x > 0$ なので，両辺の自然対数をとると，

$$
\begin{aligned}
\log y &= \log a^x \\
&= x\log a
\end{aligned}
$$

両辺を x で微分すると，

$$
\frac{y'}{y} = \log a
$$

$$
y' = y\log a = a^x \log a \quad \cdots \boxed{終}
$$

［2］（逆関数の微分）

$y = a^x$ を x について解くと，

$$
x = \log_a y
$$

両辺を y で微分すると，　　←x で微分してもよい

$$
\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y\log a}
$$

$$
\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{1}{y\log a}} = y\log a = a^x \log a \quad \cdots \boxed{終}
$$

数学３ 微分の応用 No.1

名前

$\boxed{1}$ ［**平均値の定理の利用**］ 平均値の定理を用いて，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a})$ を求めなさい。

数学３　微分の応用　No.1

解答

1 ［平均値の定理の利用］平均値の定理を用いて，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a})$ を求めなさい。

解答 $f(x)=\sin x$ とおくと，$f(x)$ は実数全体で微分可能であり，$f'(x)=\cos x$

区間 $\left[\sqrt{a},\ \sqrt{a+1}\right]$ に平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(\sqrt{a+1})-f(\sqrt{a})}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}=f'(c) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\sqrt{a}<c<\sqrt{a+1} \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② を満たす実数 c が存在する。

① の分母を払って，

$$f(\sqrt{a+1})-f(\sqrt{a})=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})f'(c)$$

$$\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a}=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})\cos c=\frac{\cos c}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

$-1\leqq\cos c\leqq 1$ なので，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\cos c}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}=0 \qquad \cdots\cdots ♠$$

よって，

$$\lim_{a\to\infty}(\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a})=\mathbf{0} \quad \cdots \text{答}$$

（結局 ② は使わなかった）

参考 ♠ を丁寧に示すなら，はさみうちの原理を使う。

$-1\leqq\cos c\leqq 1$ の各辺に $\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\ (>0)$ をかけると，

$$-\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\leqq\frac{\cos c}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}\leqq\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(\text{左辺})=0$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(\text{右辺})=0$ より，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(\text{中辺})=0$

別解 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ とおいてもよい。

この場合，$f(x)$ は $x>0$ で微分可能で，$f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

区間 $[a,\ a+1]$ に平均値の定理を用いると，

$$\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}=f'(c) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a<c<a+1 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，② を満たす実数 c が存在する。

① より，$\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a}=\dfrac{\cos\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}$

② より，$a\to\infty$ のとき $c\to\infty$

よって，

$$\lim_{a\to\infty}(\sin\sqrt{a+1}-\sin\sqrt{a})=\lim_{c\to\infty}\frac{\cos\sqrt{c}}{2\sqrt{c}}=\mathbf{0} \quad \cdots \text{答}$$

これも，最後の $=0$ のところは，はさみうちの原理を使って示せる。

数学3 微分の応用 No.2

名前 ______________________

$\boxed{1}$ ［**媒介変数型のグラフ**］ 曲線 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$ の概形をかきなさい。ただし，凹凸は調べなくてもよい。

数学 3　微分の応用　No.2

解答

$\boxed{1}$ ［媒介変数型のグラフ］ 曲線 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 2t - t^2 \end{cases}$ の概形をかきなさい。ただし，凹凸は調べなくてもよい。

解答 $x = t^2 + 1$，$y = 2t - t^2$ をそれぞれ t で微分すると，

$x' = 2t$

$y' = 2 - 2t$

$x' = 0$ とすると，$t = 0$

$y' = 0$ とすると，$t = 1$

増減表をかくと，

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$\leftarrow$	1	$\rightarrow$	2	$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\uparrow$	0	$\uparrow$	1	$\downarrow$
$(x,\ y)$	$\nwarrow$	$(1,\ 0)$	$\nearrow$	$(2,\ 1)$	$\searrow$

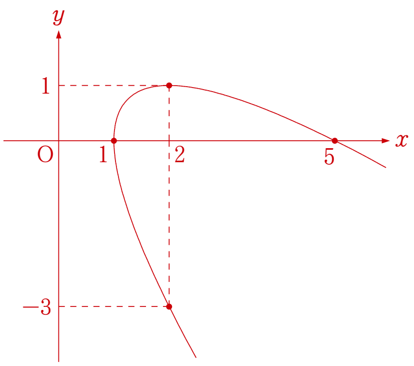
$y = 0$ とすると，$2t - t^2 = 0$，すなわち，$t = 0,\ 2$

$t = 0$ のとき $x = 1$，$t = 2$ のとき $x = 5$ なので，

この曲線と x 軸との交点は，$(1,\ 0)$ と $(5,\ 0)$ である。

よって，曲線の概形は次の図のようになる。

答



参考 これは $t = \dfrac{1}{2}$ の点 $\left(\dfrac{5}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$ を頂点とし，直線 $y = -x + 2$ を軸とする放物線である。

数学 3　積分　No.1

名前

$\boxed{1}$ ［**置換積分法の反転**］ $\tan x = u$ とおいて，次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

数学３　積分　No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**置換積分法の反転**］ $\tan x = u$ とおいて，次の不定積分を求めなさい。

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

解答 $u = \tan x$ より，

$\displaystyle\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$，すなわち，$\displaystyle du = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \int u\,du \\ &= \frac{1}{2}u^2 + C \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\tan^2 x + C} \quad \cdots \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

参考 置き換えを使わずに表現すると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \int \tan x(\tan x)'\,dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\tan^2 x + C} \quad \cdots \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

解答 $u = \tan x$ より，

$\displaystyle\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$，すなわち，$\displaystyle du = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \int (\tan^2 x + 1)\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \int (u^2 + 1)\,du \\ &= \frac{1}{3}u^3 + u + C \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C} \quad \cdots \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

参考 置き換えを使わずに表現すると，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \\ &= \int (\tan^2 x + 1)\cdot(\tan x)'\,dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + C} \quad \cdots \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

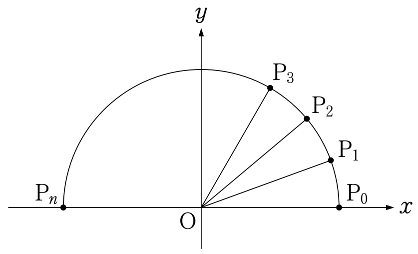
数学 3　積分　No.2

名前

$\boxed{1}$ ［**区分求積法の利用**］ 座標平面上に，原点 O を中心とする半径 r の半円 (円のうち $y \geqq 0$ の部分) がある。この半円の弧を n 等分する点を，x 座標の大きい方から順に P_0，P_1，P_2，P_3，……，P_n とする。

　また，$k=1$，2，……，n に対し，$\triangle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の重心を G_k とし，その y 座標を y_k とする。

　このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n}$ を求めなさい。



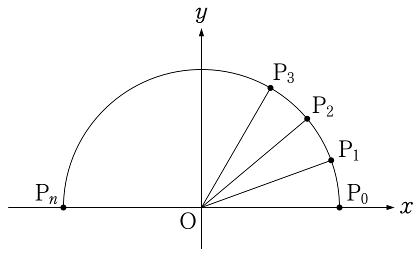
数学３　積分　No.2

解答

[1]［**区分求積法の利用**］座標平面上に，原点 O を中心とする半径 r の半円（円のうち $y \geqq 0$ の部分）がある。この半円の弧を n 等分する点を，x 座標の大きい方から順に P_0，P_1，P_2，P_3，……，P_n とする。

　また，$k=1$，2，……，n に対し，$\triangle OP_{k-1}P_k$ の重心を G_k とし，その y 座標を y_k とする。

　このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n}$ を求めなさい。



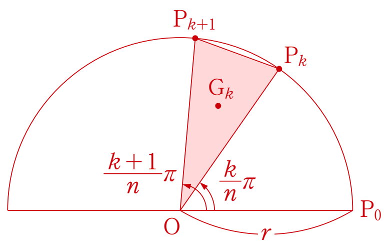
解答　$\angle P_0OP_k=\dfrac{k}{n}\pi$，$\angle P_0OP_{k+1}=\dfrac{k+1}{n}\pi$ より，

$$P_k\left(r\cos\frac{k}{n}\pi,\ r\sin\frac{k}{n}\pi\right)$$

$$P_{k+1}\left(r\cos\frac{k+1}{n}\pi,\ r\sin\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

よって，重心 G_k の y 座標は，

$$y_k=\frac{1}{3}\left(r\sin\frac{k}{n}\pi+r\sin\frac{k+1}{n}\pi\right)$$



$$(与式)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(r\sin\frac{k}{n}\pi+r\sin\frac{k+1}{n}\pi\right)$$

$$=\frac{r}{3}\int_0^1(\sin\pi x+\sin\pi x)\,dx$$　← 区分求積法の考えを使った

$$=\frac{r}{3}\left[-\frac{2}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{4r}{3\pi}}$$　… 答

参考　これは半円の重心を求めている。半円の重心は $\left(0,\ \dfrac{4r}{3\pi}\right)$ である。

数学3　積分の応用　No.1

名前 ____________________

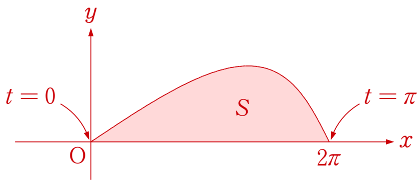
$\boxed{1}$ ［**パラメータ曲線と面積**］ 媒介変数表示 $x = 2t + \sin t$，$y = \sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線と，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

数学 3　積分の応用　No.1

解答

1 ［パラメータ曲線と面積］ 媒介変数表示 $x=2t+\sin t$，$y=\sin t$ $(0\leqq t\leqq \pi)$ で表される曲線と，x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めなさい。

解答 $0\leqq t\leqq \pi$ の範囲で，



$$\begin{cases} y=\sin t\geqq 0 \cdots\cdots ① \\ \dfrac{dx}{dt}=2+\cos t>0 \text{ より，} x \text{ は単調増加} \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①，② より，曲線の概形は右の図のようになる。

よって，求める面積は，

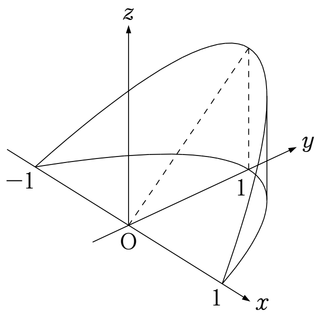
$$\begin{aligned} S&=\int_0^{2\pi} y\,dx && \leftarrow \text{とりあえず } x \text{ の積分で表しておき，} \\ &=\int_0^{\pi}\sin t(2+\cos t)\,dt && \leftarrow t \text{ に置換する} \\ &=\int_0^{\pi}(2\sin t+\sin t\cos t)\,dt \\ &=\left[-2\cos t+\frac{1}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi} \\ &=-2(-1-1) \\ &=\mathbf{4} \ \cdots \boxed{\text{答}} \end{aligned}$$

注意 この解き方では，曲線の正確なカーブの様子や極値までは分からない。ただし，面積を求める目的においては，①，② が分かれば十分である。

数学３ 積分の応用 No.2

名前

$\boxed{1}$ ［**断面積と体積**］ 右の図は，$0 \leqq y \leqq 1-x^2$，$0 \leqq z \leqq 1$ で表される柱体を平面 $z=y$ で２つに切断したときの，点 $(0,\ 1,\ 0)$ を含む側である。



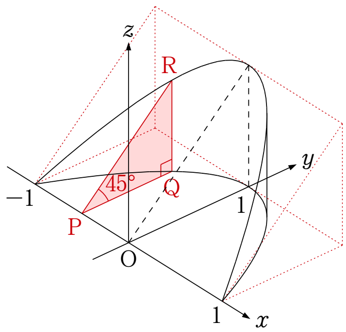
(1) 切断面の面積 S を求めなさい。

(2) この立体の体積 V を求めなさい。

数学 3　積分の応用　No.2

解答

$\boxed{1}$ ［**断面積と体積**］ 右の図は，$0 \leqq y \leqq 1-x^2$，$0 \leqq z \leqq 1$ で表される柱体を平面 $z=y$ で 2 つに切断したときの，点 $(0,\ 1,\ 0)$ を含む側である。



(1)　切断面の面積 S を求めなさい。

解答　平面 $x=t\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ でこの立体を切ったときの切断面を，右の図のように $\triangle$PQR とする。

$\triangle$PQR は $\angle$PQR $=90^\circ$ の直角二等辺三角形であり，各頂点の座標は，

P$(t,\ 0,\ 0)$，Q$(t,\ 1-t^2,\ 0)$，R$(t,\ 1-t^2,\ 1-t^2)$ である。

線分 PR の長さを $L(t)$，$\triangle$PQR の面積を $S(t)$ とすると，

$$L(t)=\sqrt{2}(1-t^2)$$
$$S(t)=\frac{1}{2}(1-t^2)^2=\frac{1}{2}(t^4-2t^2+1)$$

切断面の面積 S は，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{1} L(t)dt\\&=\int_{-1}^{1}\sqrt{2}(1-t^2)dt\\&=2\int_{0}^{1}\sqrt{2}(1-t^2)dt \qquad \text{←偶関数の性質を利用した}\\&=2\sqrt{2}\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1\\&=2\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{3}}\quad \cdots \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$

参考　切断面は，柱体の底面を y 軸方向に $\sqrt{2}$ 倍に引き延ばした形なので，面積も底面積の $\sqrt{2}$ 倍になっている。

(2)　この立体の体積 V を求めなさい。

解答　(1) の $S(t)$ を使うと，求める体積 V は，

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{1} S(t)dt\\&=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(t^4-2t^2+1)dt\\&=\int_{0}^{1}(t^4-2t^2+1)dt \qquad \text{←偶関数の性質を利用した}\\&=\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_0^1\\&=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1\\&=\boldsymbol{\frac{8}{15}}\quad \cdots \boxed{\text{答}}\end{aligned}$$