数学 2　式と証明　No.1

名前 ______________________

$\boxed{1}$ [**不等式の証明（連鎖）**] 次の不等式を証明しなさい。また，等号が成立するのはどのような場合か答えなさい。

(1)　$x^2 + xy + y^2 \geqq 0$

(2)　$x^4 + y^4 \geqq x^3y + xy^3$

数学2　式と証明　No.1

解答

1 ［**不等式の証明（連鎖）**］次の不等式を証明しなさい。また，等号が成立するのはどのような場合か答えなさい。

(1)　$x^2+xy+y^2 \geqq 0$

解答　$(\text{左辺}) = x^2+xy+y^2$

$= \left(x+\dfrac{1}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2$　　$\leftarrow x$ の2次式として平方完成した

$\geqq 0$　… 終

等号成立条件は，$x+\dfrac{1}{2}y=0$ かつ $y=0$

すなわち，$\boldsymbol{x=y=0}$　… 答

別解　$(\text{左辺}) = x^2+xy+y^2$

$= \dfrac{1}{2}(2x^2+2xy+2y^2)$　　$\leftarrow$ かっこ内を2倍し，代わりに外に $\dfrac{1}{2}$ をつけておく

$= \dfrac{1}{2}\{(x+y)^2+x^2+y^2\}$

$\geqq 0$　… 終

等号成立条件は，$x+y=0$ かつ $x=0$ かつ $y=0$

すなわち，$\boldsymbol{x=y=0}$　… 答

(2)　$x^4+y^4 \geqq x^3y+xy^3$

解答　$(\text{左辺})-(\text{右辺})$

$= x^4+y^4-x^3y-xy^3$

$= x^3(x-y)-y^3(x-y)$

$= (x-y)(x^3-y^3)$

$= \underbrace{(x-y)^2}_{ア}\ \underbrace{(x^2+xy+y^2)}_{イ}$

ア $\geqq 0$，(1) より，イ $\geqq 0$

よって，ア×イ $\geqq 0$

すなわち，$(\text{左辺}) \geqq (\text{右辺})$　… 終

等号成立条件は，ア $=0$ または イ $=0$

ア $=0 \iff x=y$

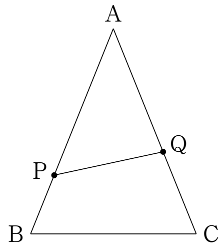
イ $=0 \iff x=y=0$　　$\leftarrow$ (1) より

すなわち，等号成立条件は，$\boldsymbol{x=y}$　… 答

数学2 式と証明 No.2

名前 ____________________

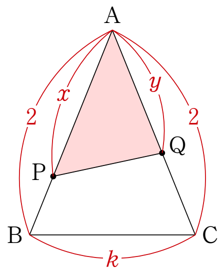
$\boxed{1}$ ［**相加平均・相乗平均の利用**］ $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=k$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AB，AC 上にそれぞれ点 P，Q を，線分 PQ が $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を二等分するようにとる。このとき，線分 PQ の長さの最小値を k で表しなさい。



数学2　式と証明　No.2

解答

$\boxed{1}$［**相加平均・相乗平均の利用**］$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=k$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AB，AC 上にそれぞれ点 P，Q を，線分 PQ が $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を二等分するようにとる。このとき，線分 PQ の長さの最小値を k で表しなさい。



解答　$\mathrm{AP}=x$，$\mathrm{AQ}=y$ とおく。

$2\triangle\mathrm{APQ}=\triangle\mathrm{ABC}$ より，

$$2\left(\frac{1}{2}xy\sin\mathrm{A}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin\mathrm{A}$$

すなわち，

$$xy=2 \cdots\cdots ①$$

$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を用いて，

$$\cos\mathrm{A}=\frac{2^2+2^2-k^2}{2\cdot2\cdot2}=\frac{8-k^2}{8} \cdots\cdots ②$$

$\triangle\mathrm{APQ}$ に余弦定理を用いて，

$$\begin{aligned}
\mathrm{PQ}^2&=x^2+y^2-2xy\cos\mathrm{A}\\
&=x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2-2\cdot2\cos\mathrm{A} && \leftarrow ①より\\
&=x^2+\frac{4}{x^2}-4\cos\mathrm{A}\\
&\geqq 2\sqrt{x^2\cdot\frac{4}{x^2}}-4\cos\mathrm{A} && \leftarrow 相加平均・相乗平均の関係より\\
&=4-4\cos\mathrm{A}\\
&=4-4\cdot\frac{8-k^2}{8} && \leftarrow ②より\\
&=\frac{k^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{PQ}\geqq\frac{k}{\sqrt{2}}$$

等号成立条件は，$x^2=\dfrac{4}{x^2}$，すなわち，$x=\sqrt{2}$

よって，$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$ のとき，PQ は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{k}{\sqrt{2}}}$ をとる。　… 答

数学 2　高次方程式　No.2

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**ω のような値**］ $x^2-x+1=0$ の解の 1 つを α とするとき，$\alpha^{12}+2\alpha^{10}+3\alpha^8+4\alpha^6+3\alpha^4+2\alpha^2+1$ の値を求めなさい。

数学2　高次方程式　No.2

解答

$\boxed{1}$ ［**ω のような値**］ $x^2-x+1=0$ の解の 1 つを α とするとき，$\alpha^{12}+2\alpha^{10}+3\alpha^8+4\alpha^6+3\alpha^4+2\alpha^2+1$ の値を求めなさい。

考え方　ω に似ているが，ちょっと違う。
ω の性質 $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ にあたるものを α で作っておき，それを利用する。

解答　$x=\alpha$ は $x^2-x+1=0$ の解なので，

$\alpha^2-\alpha+1=0$　…… ①

両辺に $\alpha+1$ をかけると，

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\alpha^3+1=0$

$\alpha^3=-1$　…… ②

よって，

(与式) $=\alpha^{12}+2\alpha^{10}+3\alpha^8+4\alpha^6+3\alpha^4+2\alpha^2+1$

$=(\alpha^3)^4+2\alpha(\alpha^3)^3+3\alpha^2(\alpha^3)^2+4(\alpha^3)^2+3\alpha(\alpha^3)+2\alpha^2+1$　← α^3 を作れるだけ作る

$=(-1)^4+2\alpha(-1)^3+3\alpha^2(-1)^2+4(-1)^2+3\alpha(-1)+2\alpha^2+1$　← ② より

$=1-2\alpha+3\alpha^2+4-3\alpha+2\alpha^2+1$

$=5\alpha^2-5\alpha+6$

$=5(\alpha^2-\alpha+1)+1$

$=5\times0+1$　← ① より

$=\mathbf{1}$ … 答

数学2 図形と方程式 No.1

名前 ____________________

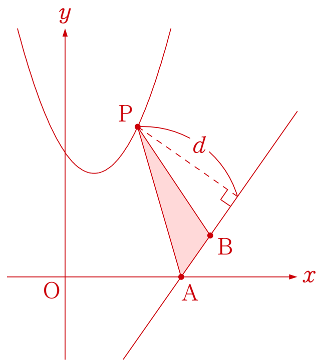
$\boxed{1}$ ［**点と直線の距離の利用**］ 2 点 A(4, 0)，B(5, 2) と，放物線 $y = x^2 - 2x + 6$ 上を動く点 P がある。このとき，△ABP の面積の最小値を求めなさい。

数学２ 図形と方程式 No.1

解答

$\boxed{1}$ ［**点と直線の距離の利用**］２点 A(4, 0)，B(5, 2) と，放物線 $y=x^2-2x+6$ 上を動く点 P がある。このとき，△ABP の面積の最小値を求めなさい。

考え方 点 P が直線 AB に最も近づくとき，△ABP の面積は最小となる。



解答 直線 AB の方程式は，$2x-y-8=0$

点 P の座標を $(t,\ t^2-2t+6)$ とし，点 P と直線 AB との距離を d とすると，

$$d=\frac{|2t-(t^2-2t+6)-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-t^2+4t-14|}{\sqrt{5}}=\frac{|t^2-4t+14|}{\sqrt{5}}=\frac{(t-2)^2+10}{\sqrt{5}}$$

← $(t-2)^2+10 \geqq 0$ なので絶対値記号は不要

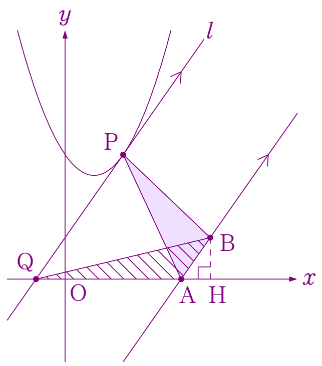
$t=2$ のとき，d は最小値 $\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ をとる。

また，$\mathrm{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

よって，△ABP の面積の最小値は，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=\mathbf{5}\quad\cdots\boxed{答}$$

別解（数 I ）



放物線に直線 AB に平行な接線 l をひく。

点 P がこの接点にあるとき，△ABP の面積は最小になる。

直線 l の方程式を，$y=2x+b$ とおく。

$$\begin{cases} y=x^2-2x+6 \\ y=2x+b \end{cases}$$

y を消去すると，$x^2-4x+6-b=0$

これが重解をもつときを考えると，

判別式 $D=(-4)^2-4(6-b)=0$

これを解いて，$b=2$

よって，直線 l の方程式は，$y=2x+2$

この直線の x 切片は -1

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP}&=\triangle\mathrm{ABQ}\\&=\frac{1}{2}\times\mathrm{AQ}\times\mathrm{BH}\\&=\frac{1}{2}\times5\times2\\&=\mathbf{5}\quad\cdots\boxed{答}\end{aligned}$$

等積変形は必須ではなく，$b=2$ から接点 P(2, 6) を求め，３点 A，B，P の座標から △ABP の面積を直接求めてもよい。

数学2 図形と方程式 No.2

名前

$\boxed{1}$ ［**領域を使った真偽判定**］領域を利用して，次の命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を判定しなさい。偽であるものについては反例を挙げなさい。

(1) $p: |x|+|y| \leqq 1 \implies q: x^2+y^2 \leqq 1$

(2) $p: x^2+y \leqq 2 \implies q: x+y \leqq 2$

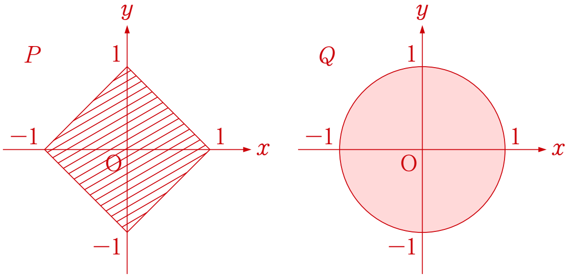
(3) $p: |x|<1$ または $|y|<1 \implies xy<1$

1 ［領域を使った真偽判定］ 領域を利用して，次の命題 $p \Longrightarrow q$ の真偽を判定しなさい。偽であるものについては反例を挙げなさい。

(1) $p : |x| + |y| \leqq 1 \implies q : x^2 + y^2 \leqq 1$

解答 条件 p, q の真理集合をそれぞれ P, Q として座標平面に図示すると，右の図のようになる。

$P \subset Q$ なので，**真** … 答



（P，Q ともに境界を含む）

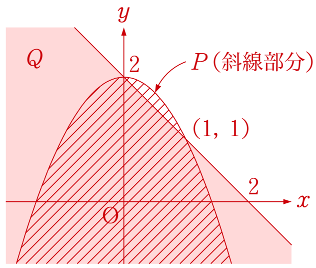
(2) $p : x^2 + y \leqq 2 \implies q : x + y \leqq 2$

解答 条件 p, q の真理集合をそれぞれ P, Q として座標平面に図示すると，右の図のようになる。

$P \not\subset Q$ なので，**偽** … 答

反例は，放物線 $y = -x^2 + 2$ の $0 < x < 1$ の範囲で，例えば $x = \frac{1}{2}$ の点を選ぶ。

（例） $\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$, $\boldsymbol{y = \frac{7}{4}}$ … 答



（P，Q ともに境界を含む）

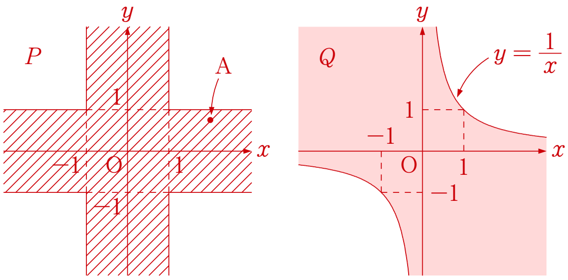
(3) $p : |x| < 1$ または $|y| < 1 \implies xy < 1$

解答 条件 p, q の真理集合をそれぞれ P, Q として座標平面に図示すると，右の図のようになる。

$P \not\subset Q$ なので，**偽** … 答

反例は，P には含まれるが Q には含まれない点として，例えば $\mathrm{A}\left(2, \frac{3}{4}\right)$ を選ぶ。

（例） $\boldsymbol{x = 2}$, $\boldsymbol{y = \frac{3}{4}}$ … 答

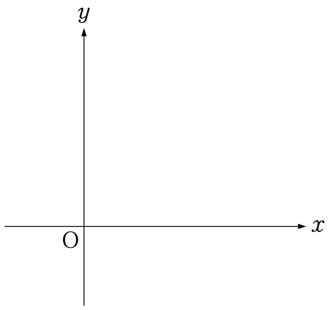


（P，Q ともに境界を含まない）

数学2　図形と方程式　No.2

名前

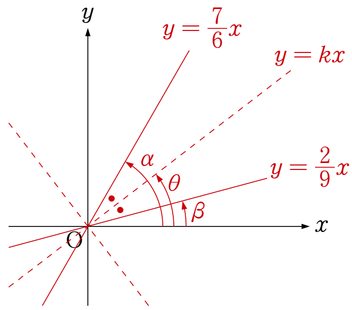
$\boxed{1}$ ［**角の二等分線の傾き**］2 直線 $y=\dfrac{7}{6}x$ と $y=\dfrac{2}{9}x$ がつくる角を直線 $y=kx$ が二等分するとき，tan の加法定理を利用して，k の値を求めなさい。



数学2　図形と方程式　No.2

解答

1　［角の二等分線の傾き］2 直線 $y=\frac{7}{6}x$ と $y=\frac{2}{9}x$ がつくる角を直線 $y=kx$ が二等分するとき，tan の加法定理を利用して，k の値を求めなさい。



解答　3 直線 $y=\frac{7}{6}x$，$y=\frac{2}{9}x$，$y=kx$ と x 軸の正の方向がつくる角をそれぞれ α，β，θ とする。

直線 $y=kx$ が角の二等分線となる条件は，

$$\alpha-\theta=\theta-\beta$$

$$\tan(\alpha-\theta)=\tan(\theta-\beta)$$

$$\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1+\tan\alpha\tan\theta}=\frac{\tan\theta-\tan\beta}{1+\tan\theta\tan\beta}$$ ← 加法定理を使った

$\tan\alpha=\frac{7}{6}$，$\tan\beta=\frac{2}{9}$，$\tan\theta=k$ を代入すると，

$$\frac{\frac{7}{6}-k}{1+\frac{7}{6}k}=\frac{k-\frac{2}{9}}{1+\frac{2}{9}k}$$

これを解くと，

$$\left(\frac{7}{6}-k\right)\left(1+\frac{2}{9}k\right)=\left(k-\frac{2}{9}\right)\left(1+\frac{7}{6}k\right)$$ ← 分母を払った

$$(7-6k)(9+2k)=(9k-2)(6+7k)$$ ← さらに分母を払った

$$15k^2+16k-15=0$$ ← 展開して整理した

$$(3k+5)(5k-3)=0$$ ← たすきがけで因数分解した

$$\boldsymbol{k=-\frac{5}{3},\ \frac{3}{5}}$$ … 答

参考　2 直線がつくる角を二等分する直線は 2 本あり，それらは垂直に交わる。答えの 2 つの k の値についても，その積が -1 であることが確認できる。

数学2　三角関数　No.1

名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ ［**三角関数を含む方程式**］ k を実数とする。θ についての方程式 $2\cos\theta + 3\sin\theta = k$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲に異なる 2 つの解をもつような k の範囲を求めなさい。

数学 2　三角関数　No.1

解答

1 ［三角関数を含む方程式］k を実数とする。θ についての方程式 $2\cos\theta+3\sin\theta=k$ が $0<\theta<\pi$ の範囲に異なる 2 つの解をもつような k の範囲を求めなさい。

解答（三角関数の合成を使った解法）

$2\cos\theta+3\sin\theta=k$ の左辺を合成すると，

$$\sqrt{13}\sin(\theta+\alpha)=k \quad \cdots\cdots ①$$

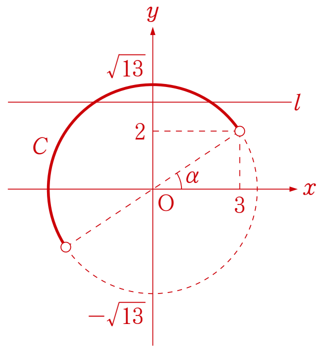
ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

また，$0<\theta<\pi$ より，

$$\alpha<\theta+\alpha<\alpha+\pi \quad \cdots\cdots ②$$

①，② より，解 θ は，右の図の半円の弧 C と，直線 $l : y=k$ の共有点に対応する。図形的に考えて，C と l が異なる 2 個の共有点をもつような k の範囲を求めると，

$$\boldsymbol{2<k<\sqrt{13}} \quad \cdots \text{答}$$



別解（合成を使わない方法）

$2\cos\theta+3\sin\theta=k$ で，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおくと，

$$2x+3y=k$$

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{k}{3} \quad \cdots\cdots ①$$

また，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$0<\theta<\pi$ より，

$$x^2+y^2=1 \quad (y>0) \quad \cdots\cdots ②$$

① が表す直線を l，② が表す半円の弧を C とする。C と l が異なる 2 個の共有点をもつような l の y 切片 $\dfrac{k}{3}$ の範囲を求める。

右の図で，$\triangle$AOP，$\triangle$OHQ は，いずれも 3 辺の比が $2:3:\sqrt{13}$ の直角三角形であることを考えると，

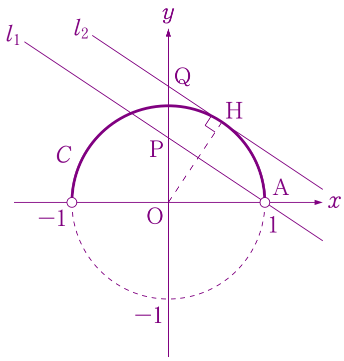
$$\mathrm{OP}=\frac{\sqrt{13}}{3} \quad (\text{直線 } l_1 \text{ の } y \text{ 切片})$$

$$\mathrm{OQ}=\frac{2}{3} \quad (\text{直線 } l_2 \text{ の } y \text{ 切片})$$

よって，求める範囲は，

$$\frac{2}{3}<\frac{k}{3}<\frac{\sqrt{13}}{3}$$

$$\boldsymbol{2<k<\sqrt{13}} \quad \cdots \text{答}$$



参考　2 つの解法は図形的にはほとんど同じである。

数学2 指数関数・対数関数 No.1

名前

$\boxed{1}$ ［**最高位の数**］ 15^{50} は何桁の数か。また，15^{50} の最高位の数字を求めなさい。次の表の値を用いてよい。

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log_{10} n$	0.3010	0.4771	0.6020	0.6990	0.7781	0.8451	0.9031	0.9542

数学２ 指数関数・対数関数 No.1

解答

1 ［**最高位の数**］15^{50} は何桁の数か。また，15^{50} の最高位の数字を求めなさい。次の表の値を用いてよい。

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log_{10} n$	0.3010	0.4771	0.6020	0.6990	0.7781	0.8451	0.9031	0.9542

解答　$a=15^{50}$ とする。

$$\begin{aligned}\log_{10} a &= \log_{10} 15^{50}\\ &= 50\log_{10} 15\\ &= 50(\log_{10} 3+\log_{10} 5)\\ &= 50(0.4771+0.6990)\\ &= 58.805 \quad \cdots\cdots ①\end{aligned}$$

［1］① の整数部分の 58 に注目する。

$$58<\log_{10} a<59$$
$$10^{58}<a<10^{59}$$

よって，a は **59 桁**の整数である。　… 答

［2］① の小数部分の 0.805 に着目する。

$\log_{10} 6<0.805<\log_{10} 7$　　← $\log_{10} 6=0.7781$，$\log_{10} 7=0.8451$ より

$\log_{10} 6+58<58.805<\log_{10} 7+58$　　← 各辺に 58 をたす

$\log_{10}(6\cdot 10^{58})<\log_{10} a<\log_{10}(7\cdot 10^{58})$　　← 58.805 を $\log_{10} a$ に戻す

$6\cdot 10^{58}<a<7\cdot 10^{58}$　　← $\log_{10}$ を取り去る

よって，a の最高位の数字は **6** である。　… 答

注意　上の表の値は，通常 $n=2$，3，7 の値だけ与えてくれる。その場合，$n=4$，5，6，8，9 の値は，$n=2$，3 の値をもとに計算して求める必要がある。$n=7$ の値を与えてくれないこともあるが，その場合はおそらく答えは 6，7 ではない。

数学2 微分 No.1

名前 ________________

$\boxed{1}$ ［**3 次関数の増減とグラフ**］次の関数の増減を調べて，そのグラフをかきなさい。

(1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(2) $y = -x^3 - 3x^2 - 3x + 1$

数学2　微分　No.1

解答

1　［**3次関数の増減とグラフ**］次の関数の増減を調べて，そのグラフをかきなさい。

(1)　$y=x^3-6x^2+9x$

解答　$y'=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると，$x=1,\ 3$

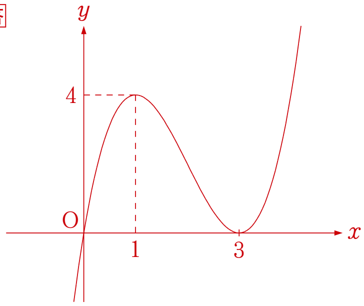
よって，y の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

また，$x=0$ のとき $y=0$ なので，グラフは原点を通る。

このことからグラフをかくと，下の図のようになる。

答



(2)　$y=-x^3-3x^2-3x+1$

解答　$y'=-3x^2-6x-3$

$=-3(x+1)^2$

$y'=0$ とすると，$x=-1$

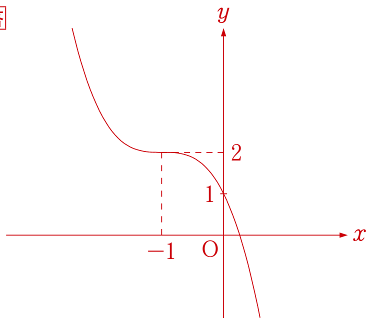
よって，y の増減は次のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	$\searrow$	2	$\searrow$

また，$x=0$ のとき $y=1$ なので，グラフは点 $(0,\ 1)$ を通る。

このことからグラフをかくと，下の図のようになる。

答



数学2　積分　No.1

名前 ______________________

$\boxed{1}$ ［**放物線と接線に囲まれた面積**］ 2 つの放物線 $C_1 : y = y = x^2 + 8x + 4$, $C_2 : x^2 - 4x + 4$ があり，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする。

(1)　直線 l の方程式を求めなさい。

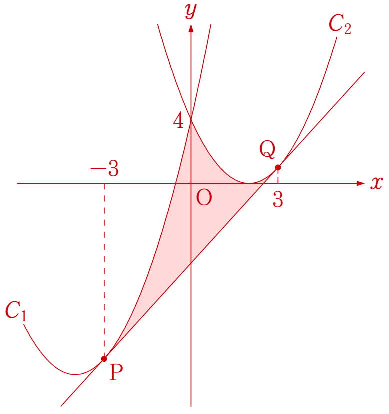
(2)　C_1, C_2, l に囲まれた部分の面積を求めなさい。

数学 2　積分　No.1

解答

1 ［**放物線と接線に囲まれた面積**］2 つの放物線 $C_1 : y = y = x^2 + 8x + 4$，$C_2 : x^2 - 4x + 4$ があり，C_1 と C_2 の両方に接する直線を l とする。

(1)　直線 l の方程式を求めなさい。



解答　C_1 について，$y' = 2x + 8$

C_2 について，$y' = 2x - 4$

C_1 上の点を $\mathrm{P}(s,\ s^2 + 8s + 4)$ と表し，

C_2 上の点を $\mathrm{Q}(t,\ t^2 - 4t + 4)$ と表す。

点 P における C_1 の接線は，

$$y = (2s + 8)(x - s) + (s^2 + 8s + 4)$$
$$= (2s + 8)x - s^2 + 4 \quad \cdots\cdots ①$$

点 Q における C_2 の接線は，

$$y = (2t - 4)(x - t) + (t^2 - 4t + 4)$$
$$= (2t - 4)x - t^2 + 4 \quad \cdots\cdots ②$$

① と ② が同一の直線を表すとき，

$$\begin{cases} 2s + 8 = 2t - 4 \\ -s^2 + 4 = -t^2 + 4 \end{cases}$$

← 傾きと y 切片がともに一致する

これを解いて，$s = -3$，$t = 3$

よって，$\mathrm{P}(-3,\ -11)$，$\mathrm{Q}(3,\ 1)$ となり，

直線 PQ の方程式を求めると，$\boldsymbol{y = 2x - 5}$　… 答

(2)　C_1，C_2，l に囲まれた部分の面積を求めなさい。

解答　2 つの区間 $[-3,\ 0]$，$[0,\ 3]$ に分けて求める。

$$\int_{-3}^{0} \{(x^2 + 8x + 4) - (2x - 5)\}dx + \int_{0}^{3} \{(x^2 - 4x + 4) - (2x - 5)\}dx$$
$$= \int_{-3}^{0} (x^2 + 6x + 9)dx + \int_{0}^{3} (x^2 - 6x + 9)dx \quad \cdots\cdots ♠$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x\right]_{0}^{3}$$
$$= 9 + 9$$
$$= \boldsymbol{18}$$

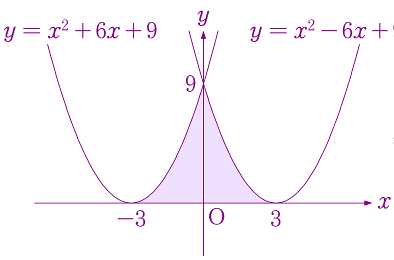
… 答

別解　♠ から判断すると，求める面積は図 1 の色のついた部分に等しく，さらに図 2 の面積と等しい。

6 分の 1 公式を使うと，

$6 \cdot 9 - \dfrac{1}{6} \cdot 6^3 = 54 - 36 = \boldsymbol{18}$　… 答

図 1



＝

図 2