$\boxed{1}$ 平方数 n^2 は，1 から連続する n 個の奇数の和として表せる。

$$
\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 1+3 \\
3^2 &= 1+3+5 \\
&\cdots \\
n^2 &= 1+3+5+\cdots+(2n-1)
\end{aligned}
$$

これらの辺々を合計すると，

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = 1\cdot n+3\cdot(n-1)+5\cdot(n-2)+\cdots+(2n-1)\cdot 1 \quad \cdots\cdots ①$$

これを利用して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ を証明しなさい。ただし，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ は既知としてよい。

$\boxed{\text{解答}}$ ① を $\sum$ を使って表すと，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(n+1-k) \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} \left\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\right\} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= -2\sum_{k=1}^{n} k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n}(n+1) \\
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= (2n+3)\frac{n(n+1)}{2}-n(n+1) \\
3\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \cdots \boxed{\text{終}}
\end{aligned}
$$