n 次関数の変化の割合

n 次関数の変化の割合の変化の割合の変化の割合の $\cdots$ の変化の割合について考える。

1 次関数

1 次関数 $f(x)=ax+b$ において，x の値が p から q まで変化するときの f の値の変化の割合を $f'(p\to q)$ と表す。

$$\begin{aligned}f'(p\to q)&=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}\\&=\frac{(aq+b)-(ap+b)}{q-p}\\&=\frac{a(q-p)}{q-p}\\&=a\end{aligned}$$

よって，1 次関数の変化の割合は一定であり，その値は a に一致する。

2 次関数

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ において，x の値が p から q まで変化するときの f の値の変化の割合を $f'(p\to q)$ と表す。

$$\begin{aligned}f'(p\to q)&=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}\\&=\frac{(aq^2+bq+c)-(ap^2+bp+c)}{q-p}\\&=\frac{a(q^2-p^2)+b(q-p)}{q-p}\\&=a(q+p)+b\end{aligned}$$

同様に，x の値が p から r まで変化する場合は,

$$f'(p\to r)=a(r+p)+b$$

x の値の変化が $p\to q$ から $p\to r$ まで変化するときの f' の値の変化の割合を $f''((p\to q)\to(p\to r))$ と表す。

$$\begin{aligned}&f''((p\to q)\to(p\to r))\\&\quad=\frac{f'(p\to r)-f'(p\to q)}{(r-p)-(q-p)}\\&\quad=\frac{\{a(r+p)+b\}-\{a(q+p)+b\}}{r-q}\\&\quad=\frac{a(r-q)}{r-q}\\&\quad=a\end{aligned}$$

よって，2 次関数の変化の割合の変化の割合は一定であり，その値は a に一致する。

3 次関数

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において，x の値が p から q まで変化するときの f の値の変化の割合を $f'(p\to q)$ と表す。

$$\begin{aligned}f'(p\to q)&=\frac{f(q)-f(p)}{q-p}\\&=\frac{(aq^3+bq^2+cq+d)-(ap^3+bp^2+cp+d)}{q-p}\\&=\frac{a(q^3-p^3)+b(q^2-p^2)+c(q-p)}{q-p}\\&=a(q^2+qp+p^2)+b(q+p)+c\end{aligned}$$

同様に，x の値が p から r まで変化する場合は,

$$f'(p \to r) = a(r^2 + rp + p^2) + b(r + p) + c$$

同様に，x の値が p から s まで変化する場合は,

$$f'(p \to s) = a(s^2 + sp + p^2) + b(s + p) + c$$

x の値の変化が $p \to q$ から $p \to r$ まで変化するときの f' の値の変化の割合を $f''((p \to q) \to (p \to r))$ と表す。

$$\begin{aligned} &f''((p \to q) \to (p \to r)) \\ &\qquad = \frac{f'(p \to r) - f'(p \to q)}{(r - p) - (q - p)} \\ &\qquad = \frac{\left\{a(r^2 + rp + p^2) + b(r + p) + c\right\} - \left\{a(q^2 + qp + p^2) + b(q + p) + c\right\}}{r - q} \\ &\qquad = \frac{a(r^2 - q^2) + ap(r - q) + b(r - q)}{r - q} \\ &\qquad = a(r + q + p) + b \end{aligned}$$

同様に，x の値の変化が $p \to q$ から $p \to s$ まで変化する場合は,

$$\begin{aligned} &f''((p \to q) \to (p \to s)) \\ &\qquad = a(s + q + p) + b \end{aligned}$$

x の値の変化の変化が $(p \to q) \to (p \to r)$ から $(p \to q) \to (p \to s)$ まで変化するときの，f'' の値の変化の割合を $f'''(((p \to q) \to (p \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to s)))$ と表す。

$$\begin{aligned} &f'''(((p \to q) \to (p \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to s))) \\ &\qquad = \frac{f''((p \to q) \to (p \to s)) - f''((p \to q) \to (p \to r))}{\left\{(s - p) - (q - p)\right\} - \left\{(r - p) - (q - p)\right\}} \\ &\qquad = \frac{\left\{a(s + q + p) + b\right\} - \left\{a(r + q + p) + b\right\}}{s - r} \\ &\qquad = \frac{a(s - r)}{s - r} \\ &\qquad = a \end{aligned}$$

よって，3 次関数の変化の割合の変化の割合の変化の割合は一定であり，その値は a に一致する。

n 次関数

これまでの結果から，n 次関数の変化の割合の変化の割合の … の変化の割合（n 回繰り返す）は一定であり，その値は x^n の係数に一致すると推測できる。