1　問題

2 直線

$$x\tan A + y\tan B + \tan C = 0 \tag{1}$$

$$x\sin 2A + y\sin 2B + \sin 2C = 0 \tag{2}$$

が交わるとき，直線 $x+y+1=0$ はその交点を通ることを証明せよ。ただし，$A+B+C=\pi$ とする。

[1966 東京女子大]

2　解答

2 直線 (1) と (2) の交点を通る直線を，実数 k を用いて次のように表す。

$$x\tan A + y\tan B + \tan C + k\left(x\sin 2A + y\sin 2B + \sin 2C\right) = 0 \tag{3}$$

ここで，$k = \dfrac{1}{2\cos A\cos B\cos C}$ とおいて，(3) の左辺の x の係数を計算すると，

$$\begin{aligned}
&\tan A + \frac{1}{2\cos A\cos B\cos C}\cdot\sin 2A\\
&=\tan A + \frac{2\sin A\cos A}{2\cos A\cos B\cos C}\\
&=\tan A + \frac{\sin A}{\cos B\cos C}\\
&=\tan A + \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} \qquad (A+B+C=\pi\text{ より})\\
&=\tan A + \frac{\sin B\cos C + \cos B\sin C}{\cos B\cos C}\\
&=\tan A + \tan B + \tan C
\end{aligned}$$

y の係数と定数項も同様に計算すると，$\tan A+\tan B+\tan C$ となる。したがって，$u=\tan A+\tan B+\tan C$ とおくと，直線 (3) は次のように表される。

$$\begin{aligned}
ux+uy+u&=0\\
x+y+1&=0
\end{aligned}$$

よって，直線 $x+y+1=0$ は 2 直線 (1) と (2) の交点を通る。 ∎

3　注意

本当は 0 による除算がないかチェックが必要。