シリーズ・算数・数学の教え方

算数と数学の違い

中学 1～2 年内容

1　内容に厳密な違いはない

「算数と数学は何が違うのか」というのはよく聞かれる問いですが、これに対して決まった答えはないようです。いろいろな説は聞きますが、「これだ！」という決定的な答えは聞いたことがありません。そもそも内容の違いで算数と数学を区別しようというのが無理なのではないでしょうか。現に、指導要領が改訂されるたびに算数の内容が数学に上がったり、数学の内容が算数に下りたりしているのですから。算数、数学というのは内容を区分したものではなく、単なる学習段階の区分だということです。問うのであれば、なぜ数学は小学と中学で名前を変えることになったのかと問うのが本当でしょう。

しかし、「算数と数学は何が違うのか」に答えなければならないのも事実です。なぜなら生徒が問うからです。また教師も「ただの算数の続きです」というのではなく、「さぁ、新しいことが始まるぞ～」と言って生徒をフレッシュな気持ちにさせたいので、算数と数学は違うと言いたいのです。私も生徒に問われたら、「算数は技だけど、数学は学問だ」と言っています。確かに数学は学問の名前ですが、教科としての数学はやはり技であることに変わりはないので、本当はごまかしているのですが。

2　方程式の有無でとらえてみる

算数、数学の内容は時代によって変わりますが、近年、方程式は中 1 で学習するものとしてほぼ固定されています。現在のカリキュラムでは、数学の始まりは正負の数→文字式→方程式という流れで、まずは方程式の習得を目指すようになっています。これなら算数と数学と違いは方程式の有無ととらえても良さそうです。

（1）　正面から攻めるか逆から攻めるか

方程式を学習すると問題解決の戦略が大きく転換します。大雑把に言うと、それまで逆から攻めていた問題に正面から攻められるようになります。これは単に計算方法が逆算から方程式に変わったというだけではありません。例えば、次のような問題の解き方を考えてみて下さい。

問 1

2 つのコップ A，B があり、それぞれに水が入っています。A の水の半分を B に移し、B の水の 3 割を A に移すと、A と B の水はどちらも 350mL になりました。最初に入っていた水はそれぞれ何 mL ですか。

算数の場合は、この操作を終わりからさかのぼって考えるのが普通です。

最後に B に残っている 350mL は前の 7 割なので、前は 350 ÷ 0.7 ＝ 500mL の水があったことになります。その時 A の水は 350 × 2 − 500 ＝ 200mL です。これは最初の半分なので、最初の A は 200 ÷ 0.5 ＝ 400mL です。その時 B の水は 350 × 2 − 400 ＝ 300mL です。

それに対して数学の場合は、最初の A と B の水をそれぞれ xmL，ymL とおき、その後の水を文字式で表現します。

	A の水	B の水
最初	x	y
途中	$0.5x$	$0.5x+y$
最後	$0.5x+0.3(0.5x+y)$	$0.7(0.5x+y)$

最後にできた式で、$0.65x+0.3y=350,\ 0.35x+0.7y=350$ という連立方程式を作り、これを解けば $x=400,\ y=300$ となります。

この問題で言えば、明らかに計算は算数の方が楽です。ただし、算数は操作を逆にたどるという転換を要するのに対し、数学は操作をそのままストレートに捉えています。発想の自然さという観点では、数学の方に軍配が上がるでしょう。

算数がこのような逆さの発想を要求するのは、「分からないところからは出発できない」という欠点のためです。水の量が 350mL と分かっているところから始めるしかないため、この問題では最後か

らさかのぼるのことになります。この程度の問題では大したことはありませんが、問題が複雑になると、これでは途中で思考が続かなくなる可能性があります。

数学の場合は、分からないところでも x や y とおいて、そこから出発することができます。問題に合わせてひねった攻め方を考える必要はなく、常に正面から攻めることができます。そうすれば複雑な問題でも途中でつまることなく、最後まで考えぬける可能性が高くなります。

（２） 思考と計算作業の分離

ただし、この例でもう１つ無視できない問題が起こっています。数学は発想の面では有利でしたが、その代わり計算が面倒になるというしわ寄せが発生しています。これは数学の欠点としてマイナスに評価してもよいのでしょうか。

いえ、実はこれこそ数学の最大の優位性なのです。このような解き方をすることによって、数学は解く過程を「思考すること」と「機械的に作業すること」に分けていると言えます。問題を解くとき、まずは問題の読解とその立式に専念します。これは思考する段階であって、とりあえずあとの計算がどうなるかということは考えません。方程式ができたら、今度はそれを計算して解く作業に専念します。今度はその計算が問題の中でどういう意味を持っているのかということは考えません。解が出るまでひたすら機械的に、正確に作業を進めればよいのです。

このように分業することで、それぞれの対象とする範囲を狭めることができ、複雑な問題でも考えやすくなります。

もちろん計算がどうなるかを考えずに立式すれば、場合によっては解き方の分からない方程式ができてしまう可能性もあります。でも、その方程式の解法の研究は、もとの問題とは完全に分離されています。例えば、先の問題は連立方程式になりました。もし連立方程式を知らなければ、どうすれば解けるかを考えなければいけませんが、その方法（代入法や加減法）はもとの問題（水の移しかえ）からは完全に独立して考えることができます。

こうして計算や方程式を専門で研究する分野として代数学ができるわけです。あるいは、機械的に方程式を解く段階になったら「あとはコンピューターに任せてしまえ」なんてこともできるわけです。これが分業のメリットです。

算数にこのような発想が全くなかったわけではありません。例えば筆算の方法や分数の計算方法などは、それを利用する問題からは独立しています。しかしいずれもその目的は、常にその場で答えを出してしまうことでした。文字式や方程式のように、未解決のものを保留したまま考えを進める手段にはなりません。計算の都度出てくる部分的な結果の意味が分からなければ、そこから思考が進まなくなってしまいます。このようなやり方では、問題が複雑になると最後まで見通しを立てることが困難です。これは思考と計算の完全な分離ができていないからです。

３ 数学らしさを理解して教えること

中２の問題集に次のような問題がありました。

問２

ある中学校の昨年度の生徒数は 470 人であったが、今年度は男子が 6 ％減少し、女子が 5 ％増加して、全体では 4 人減少したという。今年度の男子、女子の生徒数を求めよ。

そしてその解法は次のように書かれています。

解法

昨年度の男子と女子の人数をそれぞれ x 人，y 人とおきます。まずは $x+y=470$。そして、男子の増加量 $-0.06x$ 人と女子の増加量 $0.05y$ 人から、$-0.06x+0.05y=-4$。これを解くと、$x=250, y=220$ となります。よって、今年度の男子は 235 人、女子は 231 人です。

そこにはアドバイスとして、(1) 今年度ではなく昨年度の方を x, y とおくこと、(2) 今年度の人数から $0.94x+1.05y=466$ という式を立てるのでなく増減に注目するべき、と書かれていました。どちらもあとの計算が面倒になることを避けるためです。それがあらかじめ分かっているのなら別に構わないとは思いますが、あとの計算を心配してわざ

わざ不自然な立式をするというのは、本来の数学が目指す問題解決の方針に反するものです。

正面突破で最もストレートに解くならば、今年度の男子と女子をそれぞれ x 人, y 人とおいて、次のような方程式を立てることになります。

$$\begin{cases} x+y=466 \\ \dfrac{x}{0.94}+\dfrac{y}{1.05}=470 \end{cases}$$

そしてこれを解くのが理想です。もちろん、きちんと $x=235,\ y=231$ が出ますが、手計算では確かに面倒です。

では、今年度ではなく昨年度の人数を x 人, y 人とおくのは仕方ないとして、次に考えるのは、昨年度と今年度の合計人数から方程式を立てるという方法です。これは立式の発想が自然で、とても分かりやすい式ができます。

$$\begin{cases} x+y=470 & \cdots\cdots ① \\ 0.94x+1.05y=466 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

これも、①×0.94−② なんてやり始めたらやはり面倒な計算になります。だから問題集は「避けろ」とアドバイスしていたわけです。でも、①−② を計算すれば、

$$0.06x-0.05y=4 \quad \cdots\cdots ③$$

という式が得られます。この後 ① と ③ を連立方程式にすれば十分簡単に解けるでしょう。つまり、③ は問題文から「増減を考えて」作るのではなく、計算の段階で「計算を工夫する」必要性から作るべきものです。計算の都合をむやみに立式段階に持ち込まないこと。これが分業体制をとる数学的解法の理想です。

現実問題で言えば、① と ② を立てた段階で、9 割以上の中学生はそのまま加減法で解こうとするでしょう。そうすれば相当の確率で計算をリタイアしてしまうはずです。問題集にあったアドバイスはそういう配慮から書かれたものだろうと思います。

もちろん、以上のような作戦を考えた上で、その教訓として教えるのは構いません。しかしかなりの教師がこれにそのまま従って、「こうやって解くものなんだぞ。そうすれば簡単だ」なんて理屈のない教え方をしているのも事実です。

どうして昨年度と今年度の合計人数から立式するという自然な解法が、計算の都合で否定されなければならないのか。そこに十分な理由と回避策が示されなければ、数学の目指してきた方針自体が怪しくなってしまいます。生徒は理屈抜きでも正解を得られる方法を欲しがるでしょうが、そこに安易に迎合してはいけません。本当に教えなければならないことは、数学のテストで点を取る方法ではなく、数学だからです。

（2011.6.7 浜田昌宏）