シリーズ・算数・数学の教え方

比例感覚を鍛えよう

小学 6 年〜中学 1 年内容

1　機械的に解くばかりではダメ

（1）　比例の定義

比例というのは、言うまでもなく「一方が r 倍になれば、他方も r 倍になる」という 2 量の関係のことです。例えば、りんごを買うときの個数と代金。買う個数を 2 倍にすれば、代金も 2 倍になります。鉄のかたまりならば体積と重さ。2 倍の体積があれば、重さも 2 倍になっているはずです。これが比例だと思っておけば、通常の生活において困ることはほとんどないでしょう。このように、比例している数量を見つけて「一方が r 倍になれば、他方も r 倍になる」と分かる感覚を、ここでは比例感覚とよぶことにします。

算数はこれでもいいでしょうが、数学では関数の入り口として比例を学習しますから、このような定義では都合が悪いことがあります。そこで、中 1 では比例の定義を次のように改めます。

比例の定義

y が x の関数であり、その関係式が $y = ax$ で表されるとき、y は x に比例するという。（ただし a は 0 でない定数）

同じことを定義する方法が何通りもあることは不思議ではありません。例えば、正三角形を「3 辺が等しい三角形」と定義しても、「3 つの内角が等しい三角形」と定義しても、同じ三角形を定義したことになります。しかし、どちらかに統一しておかないと議論が成り立ちませんので、学校数学では前者を定義としておき、後者はそこから導かれる性質（定理）と位置づけています。

比例の場合は、いま上のように定義しましたから、「一方が r 倍になれば、他方も r 倍になる」という方は定義ではなく、定義から導かれる性質となるわけです。

比例の性質

y が x に比例するとき、x の値が r 倍になると、y の値も r 倍になる。

普通の感覚で言うと何だか逆のような気がしますが、今後このシリーズが 1 次関数、2 次関数と続いていくことを考えると、関係式の形で定義しておいた方が一貫性があり、区別もはっきりするので合理的であると言えます。「これぞ数学流」と言って、算数との違いを見せられるよい題材かも知れません。しかし、だからといって中 1 の比例が $y = ax$ をいじる練習一辺倒になってしまうのは、本当にこれでいいのかなと思うことがあります。

問題 1

ア．y が x に比例し、$x = 2$ のとき $y = -3$ である。$x = 6$ のときの y の値を求めなさい。

イ．y が x に反比例し、$x = 2$ のとき $y = -3$ である。$x = 6$ のときの y の値を求めなさい。

おそらく正解者のほぼ全員が、**ア**は $y = ax$ に、**イ**は $y = \dfrac{a}{x}$ に代入して、比例定数の a を求めてから解いているはずです。この問題に至るまでの流れがそのような解き方に誘導しているのだから当然と言えます。

しかしこの問題には別の意図があります。どちらも x の値は $2 \to 6$ で 3 倍になっているので、**ア**は y も 3 倍になり、**イ**の y は $\dfrac{1}{3}$ 倍になると考えることもできます。

解答 1

ア．$-3 \times 3 = -9$

イ．$-3 \div 3 = -1$

このような解き方をしなさいというのではなく、比例の性質や反比例の性質を使って解くこともできるということは分かってほしいのです。もともと比例の学習はここからスタートしたのですから。逆にこれが分からなければ、比例感覚もあやふやなまま機械的に解法を練習していることになりますが、そんな学習はむなしいばかりです。

そんなことは小6で学習したからもういいのだといえる生徒は実際に多くありません。実際小6での比例の扱いは、その重要度の割にはあまりに軽すぎます。その結果、例えば中学理科の圧力、電流、地震など、比例感覚を要する計算分野で多くの生徒が悩む結果となっています。

（2） 2乗に比例する関数

中3になると2乗に比例する関数を習いますが、やはり $y = ax^2$ を機械的に操作する練習がほとんどです。「x の値が r 倍になると、y の値は r^2 倍になる」という性質も習うのですが、身近な例が限られているというせいもあって、あまり使う機会がありません。それでも次のような問題は出ることがあります。

> 問題2
>
> ある宝石の値段は重さの2乗に比例します。100万円の宝石を誤って2：3の重さに割ってしまうと、損害額はいくらですか。

確かに身近な例とは言えませんね。

一方は宝石の重さが $\frac{2}{5}$ 倍になったので値段は $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ 倍、もう一方は重さが $\frac{3}{5}$ 倍になったので値段は $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ 倍と考えて解きます。

> 解答2
>
> 100万 $\times \frac{4}{25} +$ 100万 $\times \frac{9}{25} =$ 52万円
>
> 100万 $-$ 52万 $=$ 48万円

方程式で機械的に解くばかりでなく、時にこのような比例感覚の根本に帰るような問題があるのは大変ためになることだと思います。機械的に応じることに慣れてしまった生徒にとって、やはりこういう問題は難しいようです。

2 いろいろな場面で比例的な見方を

やはり比例感覚は算数のうちにしっかり鍛えておくべきだと思います。比例の単元であまり十分な扱いができないなら、その他の単元でなるべく比例的な見方ができるように指導するという方法があります。

（1） 倍分 (通分)

倍分というのは約分の逆の操作のことで、通分などで使います。これは約分と違って、あらかじめ「分母を○○にしたい」といったターゲットが必要です。例えば、$\frac{3}{4}$ の分母を20にしたいという場面があるとします。このとき、「分母は4→20で5倍になっているから、分数を大きさを変えないためには、分子も5倍しなくてはいけない」という理屈を強調します。分子・分母を同時に5倍するというのではなく、一方が変わると他方も変わるという言い方にします。

（2） 比例式

$5 : 8 = 15 : x$ の x を求める問題です。これは「5→15が3倍になっているので、8→x も3倍になる」という説明になります。特別取り上げなくても、誰でもそのような説明をすると思いますが、これも一方が変わったから他方も変わるという意味を強調して下さい。

ところで、この問題を「内項の積は外項の積」という公式を使って、$5 \times x = 8 \times 15$ に直して解くという方法がありますが、これは教えるタイミングを誤ると毒になりますから気を付けて下さい。比例感覚を通り越して機械的に答えが出てしまうので、比例の訓練になりません。比や比例が学習の「対象」であるときはお預けにして、学習の「手段」となったときに教えて下さい。

（3） 文章題

比例感覚でとらえられる問題は、なるべくその比例構造を強調します。

> 問題3
>
> 紙を500枚重ねると厚さは4cmでした。この紙を300枚重ねると、厚さは何cmですか。

単位量（紙1枚あたりの厚さ）で解くこともできますが、比や比例を習った後は、なるべく比例を利用します。「枚数が500枚→300枚で $\frac{300\text{枚}}{500\text{枚}}$ 倍になっているから、厚さも同倍される」という理屈をそのまま式に表します。

解答 3

$$4\,\mathrm{cm} \times \frac{300\,枚}{500\,枚} = 2.4\,\mathrm{cm}$$

普通は式中に単位を書き込んだりしないもののようですが、それが理解の助けになるときは構わず単位付きで書いています。

始めのうちは立式が簡単な比例式を使っても構いませんが、

$$500\,枚 : 4\,\mathrm{cm} = 300\,枚 : x\,\mathrm{cm}$$

と表すと、「枚 : cm」という不自然な比になり、

$$500\,枚 : 300\,枚 = 4\,\mathrm{cm} : x\,\mathrm{cm}$$

と表すと、500 枚→ 4 cm を見てしまう場合があり、これも不自然です。不自然でも解けますが、そうなると頭が具体的なイメージから離れて、後は機械的な処理だけになってしまう恐れがあります。

この比例式から、500 枚→ 300 枚を取り出して解くように指導し、やがては解答 3 のような式を直接立てられるようにして下さい。

この $A \times \dfrac{B'}{B} = A'$ という形は、算数や数学だけでなく理科でも頻繁に利用できますので、このような簡単な文章題のうちからしっかり慣れさせておきたいものです。（科目によって指導者が違うと、一貫性を持たせるのが難しいかも知れませんが）

（2011.4.13 浜田昌宏）