シリーズ・算数・数学の教え方

1 次関数と変化の割合

中学 2 年内容

1　答えよりも理解を問うべし

1 次関数は中 2 の数学の中でも大きなウェイトを占める単元です。中 1 で扱う比例・反比例が算数で習った内容とあまり変わらないのに対して、中 2 の 1 次関数はボリュームもレベルも一気に上がります。中 1 の比例・反比例の場合、問題のバリエーションがあまりありませんので、よく分からずとも機械的に答えていればとりあえずクリアできますが、1 次関数ではそうはいきません。答えが出ればよいというのではなく、なぜこのように解くのかという意味をきちんと意味を理解しておかないと、パターン的な解法だけで応じるのではやがて限界がきます。

2　具体から抽象へ

まず、テキストや参考書などで 1 次関数のページを開いてみると、まず最初は 1 次関数の定義から入っています。

1 次関数とは

y が x の関数で、その関係式が $y = ax + b$ の形で表されるとき、**y は x の 1 次関数である**という。

これがなければ始まらないので当たり前と言えるでしょう。でも指導するときはこんな定義をいきなりぶつけるのではなく、もちろん具体例から入らなければいけません。

例

ア．200 円のかごに 1 個 120 円のりんごを x 個入れたときの代金は y 円です。
イ．水が 3ℓ 入った水そうに毎時 2ℓ の割合で x 分間水を入れると $y\ell$ になります。

これらに共通する性質を考えさせます。それは、どちらも**初期値**（初めから y にたまっている値）があることと、その後で**一定の割合**で増え続けていくことです。たった 2 つの例では少ないので、こんな例は他にいくらでもあることは付け加えておいて下さい。そしてこの共通する性質に名前を付けようということで「1 次関数」という名前が登場します。

もともと関数というのは数量関係に付けられた名前で、かなり抽象度の高い難解な概念ですから、急に与えると拒否反応が出ます。だから、このように分かりやすい具体例から話を起こしていくことは不可欠です。

次にこれらの関係式を作らせます。等式をつくるのは中 1 内容ですから、$y = ax + b$ なんて教えなくても答えられなくてはいけません。

関係式

ア．$y = 200 + 120x$
イ．$y = 3 + 2x$

$y = ax + b$ とは項の順番が違いますが、今はこの方が自然です。そしてこれらの式はいずれも次のような形をしていることに注目させます。

共通する形

$$y = (\text{初期値}) + (\text{一定の割合})x$$

ここから式の形だけをぬき出したものが $y = ax + b$ であり、これが 1 次関数の式であるという説明になります。（この説明ならば $y = b + ax$ と言いたいところですけれど）

このような導入をすることで、なぜそんな定義が登場するのかということが無理なく分かります。いきなり定義を与えて、「次の関係式から 1 次関数であるものを選べ」なんて練習を始めるのはナンセンスです。またこのように式をとらえさせておくことは、次の「変化の割合」や後の「傾き」「切片」への布石にもなります。

もし生徒が中学入試を経験しているならばおそらく等差数列を知っていると思いますから、1 次関数が等差数列とよく似ていることに気付かせてやるのも面白いかもしれません。（初期値が初項、一定の割合が公差に対応します）

3　変化の割合は単位量

次は変化の割合です。1 次関数の単元の中でもこのように最初の方に登場しますが、実はかなりの難関です。実際、この時点で変化の割合を本当に理解できる生徒は少ないように思います。(答えだけは機械的に出す生徒はたくさんいますが)

ここで分かってほしいことは、次の 2 点です。

変化の割合

- 変化の割合 $= \dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$
- 変化の割合は $y = ax + b$ の a に一致する。

これに従って問題に答えるだけならばあまり難しくはありませんが、それで理解できたとは言えません。これらが何を意味しているのか、例を使ってしっかり考えさせましょう。

(1)　y の増え方を表したい

先の例によれば、アの代金は 120 円ずつ増えるし、イの水は 2ℓ ずつ増えます。まとめて言えば、y がどのように増えているか。それを一般的に表現したいということが、変化の割合の出発点です。

(2)　単位量で表している

買うりんごが 1 個増えれば代金は 120 円上がります。水を入れる時間が 1 分長くなれば水は 2ℓ 増えます。かごの中にりんごを 1 個、また 1 個と入れる場面を想像させて、代金が 120 円ずつアップしていく様子をイメージさせて下さい。つまり、この 120 円や 2ℓ というのは、x が 1 増えたときの y の増え方を表しています。実は算数で習った速さも、時間が 1 だけ増えたときどれだけ進んだか、という表し方をしました。それと同じことです。

(3)　それを計算で求めるならば

「りんごを 2 個増やすと代金が 240 円アップしました。3 個増やすと 360 円アップしました。代金はどのように増えていますか？」と考えると、

- $240 \div 2 = 120$ 円
- $360 \div 3 = 120$ 円

このように計算して、「1 個増やすごとに 120 円増えている」と答えられます。これだけ易しければ、割り算である理由も自然に分かるでしょう。これも速さで言えば、進んだ道のりを時間で割って速さを求めるのと同じことです。(速さを引き合いに出すのは、生徒のレベルによっては余計な混乱をよぶことがありますから注意して下さい)

(4)　割合にこだわらない

今行った割り算は、まさに

(代金の増加量)÷(個数の増加量)

すなわち

(y の増加量)÷(x の増加量)

でした。これで変化の割合の公式は、x が 1 増えたときの y の増え方を求める式であることが分かりました。これを割合とよぶのは、この割り算が「x の増加量に対する y の増加量の割合」を求めているとも読めるからです。でも実際には単位量ととらえた方が分かりやすいので、割合としての表現にあまりこだわらない方がいいでしょう。そしてそれは要するにりんごの単価を求めているだけですから、120 円。すなわち、$y = ax + b$ の a に表れているというわけです。

4　理解度が試される問題

実際、変化の割合に関して出される問題はほとんど機械的に解けるので、案外簡単に正解できます。一応確認しておきます。

問題 1

1 次関数 $y = 2x - 7$ で、x が 1 から 4 まで増加したときの変化の割合を求めよ。

x の係数を見て 2 と答えても正解ですが、こういう出題は変化の割合の公式を使う練習として出されていると読むべきです。普通は以下のような増減表を書いて解きます。

x	$1 \;\rightarrow\; 4$
y	$-5 \;\rightarrow\; 1$

x は 3 増えて y は 6 増えているので、$\dfrac{+6}{+3} = 2$ と求められます。

変化の割合の意味を理解しているかどうかでは

なく、公式が使えるかどうかを問うような問題です。x, y から個，円が削ぎ落とされ、抽象的な数だけになっているからです。確かに、具体的なことがらをいつまでも相手にするのではなく、抽出した数や式で処理するというのが数学のやり方ですから別に悪いことではないのですが、変化の割合を扱うからには、その理解度も尋ねてみたくなります。

そこで次の問題ですが、これは解き方によっては、変化の割合に対してある程度深い理解を要します。

問題 2

1 次関数 $y = 4x + 13$ で、x が -1 から 4 まで増加したときの y の増加量を求めよ。

$x = -1$ のとき $y = 9$、$x = 4$ のとき $y = 29$ なので、y の増加量は $29 - 9 = 20$ と求められます。

x	-1	→	4
y	9	→	29

しかし、これは $4-(-1) = 5,\ 4\times5 = 20$ と求める方がかしこいと言えます。変化の割合を速さと同じ単位量としてとらえている生徒は、速さの 3 用法と同じように変化の割合の公式も 3 通りに使えることに気付いているでしょう。それに $y = 4x + 13$ の 13 は答えに関係ありませんので、使わない方がよい解き方です。

このように解くことは必須ではありませんが、この解き方が分かるかどうかで変化の割合の理解度を測ることができます。

（2011.3.29 浜田昌宏）